

Interaction between Photons and Atomic Ensemble & Photonic Quantum Storage

(Dissertation for Ph.D)

by

Yong Li

Directed by Professor Chang-Pu Sun

Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences,
P.O.Box 2735, Beijing 100080, China
May, 2004

摘要

量子信息和量子计算是近年来迅速发展起来的、量子力学与信息科学交叉的前沿领域。其主要目标是充分利用量子态的相干特性，以崭新的方式进行信息的存贮、处理和传递，从而完成传统经典方式不能完成的任务。量子信息处理中的一个关键环节是量子存贮。由于光子具有最快的传播速度和很强的稳定性，它在量子信息中具有相当重要的地位，因此如何实现光子的量子信息存贮也就成为一个重要的课题。本文就如何利用原子系综系统来实现光量子信息的存贮进行了理论上的探讨。我们的主要工作是从大 N 和低激发极限下原子系综集体激发可以简化为一个玻色子模式出发，重新讨论了原子系综和光场相互作用的电磁诱导透明 (EIT) 现象，发展和推广了三能级 Λ 型原子系综 EIT 系统在绝热演化下的集体态的性质以及探测量子光场的传播问题。并且进一步研究了三能级或者四能级原子系综与光场相互作用下的 EIT 系统中存在的光子信息的量子存贮和几何量子存贮。

本论文可分为四部分。第一部分包括第一章和第二章。为了论文的完整性和系统性起见，论文的第一章介绍量子信息、量子计算和量子存贮的一些基本概念。第二章简单回顾了 EIT 现象，介绍了基于单原子半经典方法的 EIT 现象的理论处理。

第二部分包括第三章和第四章。第三章阐述了为何要利用 EIT 的系统来实现光量子信息的存贮，简单介绍用三能级 Λ 型原子系综集体激发的方法来存贮光量子信息的基本思想。然后介绍我们关于光在基于 EIT 的全同玻色原子系综中的量子存贮的工作。我们从全同玻色原子集体激发的角度出发研究了量子探测光场在该系统中的量子存贮和传播问题。第四章首先以二能级原子为例引入原子系综集体激发的基本思想，讨论了在何种情况下原子集体激发算符可以当做玻色算符处理，从而可以使得问题简单化。并通过计算表明了原子系综用来作为光存贮中可能存在的一些问题，详细讨论了由于非均匀耦合系数诱导的量子漏损和由于空间运动诱导的量子漏损所带来的量子退相干的影响，相应地提出了抑制这种退相干的方案。

第三部分包括论文的第五章。这一部分介绍了我们关于三能级 EIT 现象的一些新的研究和推广。首先，为避免原子系综中原子空间运动所带来的退相干影响，提出将 Λ 型三能级原子固定在晶格上的电磁诱导透明机制，并阐述了该系统的隐藏对称性以及系统集体激发的能谱结构，讨论了如何利用此系统来进行量子存贮。进而讨论了多模量子光场在固定原子空间位置的系统中的暂态传播问题。

然后，将上述方法推广到更一般的两光子共振时的 Λ 型三能级原子系综 EIT 情况，并讨论了此时该系统的能谱结构以及探测光场的量子存贮和探测光群速度的稳态解等问题。

第四部分为论文的第六章。参照对于 Λ 型三能级原子系综 完全 共振 EIT 系统的研究，本章讨论了三能级原子系综 近 共振 EIT 系统中的几何量子存贮问题，进而研究了四能级原子系综近三光子共振 EIT 下的非阿贝尔几何量子存贮，并针对四能级原子系综完全三光子共振 EIT 系统的简化情况，详细讨论了如何利用它完成一个具体的几何存贮过程。

关键词: 电磁诱导透明, 量子存贮, 集体激发, 暗态极化子, 几何量子存贮

Abstract

Quantum information and quantum computation is a newly-developed interdisciplinary of quantum mechanics and information sciences. It aims to accomplish the storage, process and transmission of information by means of the coherence of quantum state, since it can achieve certain tasks which are impossible to be done with the classical information sciences. One of the important tasks in quantum information is the storage of quantum information. Since photons are fast, robust and available carriers of quantum information, it is an important role to realize the quantum information of photons. This dissertation represents our theoretical study on how to realize the quantum storage of photons by means of the atomic ensemble system. We have mainly studied the electromagnetically induced transparency (EIT) system based on three-level or four-level atoms ensemble interacted with light fields, and investigated detaily the propagation of quantum probe light field in the atomic medium. Moreover, the quantum storage or geometric quantum storage of the quantum probe light field within the EIT based atomic ensemble is given.

This dissertation comes in four parts. The first part includes chapter 1 and chapter 2. In chapter 1, the basic notation of quantum information, quantum computation and quantum storage is introduced. A brief review of EIT phenomenon is given in chapter 2, and the semi-classical theoretical method based on single-atom is also given to deal with the EIT system.

The second part includes chapter 3 and chapter 4. In chapter 3, we first give the basic idea of the collective atomic excitation to solve the problem of EIT system. Then, our work about the quantum storage of photons in the system of Bosonic atomic ensemble is presented. With this method, we have studied the propagation of the quantum probe light in the system of Bosonic atomic ensemble. In chapter 4, we introduce the collective atomic excitation of two-level atoms to discuss how the collective excitation can act as a Bosen so that a more concise way can be used. Then we discuss the latent problem when using the atomic ensemble to process quantum information due to the decoherence effect within the atomic ensemble. Two kinds of decoherence effect induced by the inhomogeneous coupling to external control fields and by the atomic spatial

motion are given, and the relative scheme to restrain the decoherence effect are also proposed.

The third part includes chapter 5. Here our new study and generalization about three-level Λ atoms ensemble EIT phenomenon is given. Firstly, to avoid the decoherence effect induced by the atomic spatial motion, we propose a new EIT scheme based on ensemble of Λ -type atoms whose positions are fixed at the lattice sites of a crystal. By finding a hidden symmetry and constructing the eigen-energy structure in the total system with the help of our method, we discuss how to achieve the quantum storage of photons in this system. Then, the multi-mode probe quantum light propagation is solved in the transient limit. Last, we generalize our method to study the problem of two-photon resonance EIT system based on Λ atoms. The eigen-energy structure, photonic quantum storage and quantum probe light group velocity under this system are given in detail.

The fourth part includes chapter 6. We generalize our method, which has been used to study the three-level *exactly-resonant* EIT system, to discuss the three-level atomic ensemble based *nearly-resonant* EIT system. The geometric quantum storage of photons is proposed in such a system. Moreover, we discuss the non-Abelian quantum storage of photons under *nearly-resonant* EIT system based on the four-level atomic ensemble. Taking into account the reduced *exactly-resonant* system based on the four-level atomic ensemble, we propose an available scheme detailly to accomplish the geometric quantum storage by means of this system.

Keywords: Electromagnetically Induced Transparency, Quantum Storage, Collective Excitation, Dark state Polariton, Geometric Quantum Storage

目 录

第一章 引言：量子存贮	1
§1.1 量子计算与量子信息	1
§1.2 量子存贮的研究进展	3
§1.3 论文内容与章节安排	6
第二章 电磁诱导透明的单原子图象	9
§2.1 电磁诱导透明 (EIT)	9
§2.2 EIT 机制的半经典单原子图象处理	10
第三章 EIT 的集体图象与光量子存贮	17
§3.1 光量子存贮与 EIT	17
§3.2 原子系综中 EIT 的集体激发图象	19
§3.3 全同玻色原子系综中的 EIT 处理	27
§3.4 小结	33
第四章 原子系综集体激发及其量子漏损	35
§4.1 原子系综的集体激发	35
§4.2 集体激发的量子漏损	38
§4.3 质心运动诱导的量子漏损	44
§4.4 小结和讨论	51
第五章 Λ 型原子系综集体激发的 EIT	53
§5.1 单光子共振 EIT “原子晶体”的能谱结构与隐藏动力学对称性	53
§5.2 多模探测光情况下的量子存贮和传播	60
§5.3 两光子共振 EIT 系统的集体激发	73
§5.4 小结与讨论	86
第六章 基于原子系综的几何量子存贮	89
§6.1 三能级原子系综近两光子共振 EIT 的几何量子存贮	89
§6.2 四能级原子系综 EIT 系统的几何量子存贮	97
§6.3 小结	106
第七章 总结和展望	107

附录一 子系统动力学	109
附录二 绝热条件	111
参考文献	113

第一章 引言：量子存储

§1.1 量子计算与量子信息

在上个世纪里，计算机科学技术取得了辉煌的成就，它深刻地改变了人类的基本生活方式。现代计算机科学的诞生可追溯到 1936 年图灵的文章 [1]。图灵发展了一套应用于今天称之为图灵机的抽象记号，他证明了存在一个通用图灵机模型，可以利用它模拟任何其它的图灵机。他还声称，通用图灵机完全可以完成算法所指定的任务，这就是后来称之为 Church-Turing 论题。这个论题断言算法具有等效性，可以利用通用图灵机从数学上严格地对算法进行分类。这个断言为计算机科学理论的发展奠定了基础。

1946 年，由电子器件组装的第一台数字计算机在美国诞生。从此，计算机技术无论是软件上还是硬件上都以惊人的速度发展。1965 年，摩尔 (Moore) 提出一个关于计算机硬件发展的规律—摩尔定律。根据摩尔定律，大约每过十八个月，计算机微处理器的速度就增长一倍，其中单位面积 (或体积) 上集成的元件数目也会相应地增加。在之后的几十年时间里，计算机硬件的发展速度基本遵循这个定律。可以预见，在不久的将来，随着单个电路元件尺寸的越来越小时，电路的量子效应将不可避免地影响到器件的功能，芯片元件就会达到它能以经典方式工作的极限尺度。因此，突破这种尺度极限是人们当前所面临的一个重大科学问题。另一方面，由于现有计算机的操作是不可逆的，随着计算机技术的不断发展，其不可逆操作所带来的能量损耗也会限制芯片集成度的提高。

为了突破计算机的上述极限，人们进行了很多的研究探索。比如，人们提出了光计算 [2, 3, 4] 和生物计算 [5, 6] 的概念。这些研究一旦实现，将能有效地突破现有计算机的极限，因此能够大大地提高现有计算机的能力。但是从理论上来说这些研究还是属于经典计算机的冯·诺依曼计算机结构范畴。解决上述问题的另外一个可能途径是使用基于量子计算理论的量子计算机结构来取代基于经典物理理论的冯·诺依曼计算机结构。

1982 年，著名物理学家费曼 (Feynmann) 在讨论用计算机实现普适模拟问题时阐述了用量子系统来模拟任何其它系统物理行为的观点，首次提出了量子计算机的概念 [7]。费曼指出，在经典计算机上模拟一个量子系统似乎必然是困难的，建立基于量子力学原理的量子计算机则能有效地避免这些困难。在此基础上，1985 年，英国牛津大学的 Deutsch 初步阐述了量子图灵机的概念 [8]，并且指出了量子图灵机可能比经典图灵机具有更强大的功能。之后，随着 1994 年著名的关于大数因子化的 Shor 量子算法 [9]、1995 年 Shor 的量子纠错方案 [10]、

1997 年 Grover 搜索算法 [11] 和华裔科学家姚期智关于量子计算复杂性和可行性 [12] 的提出，以及其它关于量子计算在实际物理系统中可能实现的实验演示的出现 [13, 14]，量子计算引发了越来越多科学家的兴趣，从而使得量子计算的研究变成物理学家、计算机专家和数学家共同关心的交叉领域研究课题。

迄今为止，量子计算的研究取得了很大的进展，实验上也已经提出许多关于实现量子计算的物理方案，比如说利用原子与量子光腔相互作用的系统 [15, 16, 17]，激光冷却离子系统 [13, 18]，核磁共振 (NMR) 系统 [14]，量子光学系统 [19, 20]，量子点系统 [21, 22]，约瑟夫森结超导系统 [23, 24] 等等。但是当前基于这些方案的所有实验中，还仅仅停留在少数量子位和量子逻辑门的操作或演示的程度，离真正意义上的量子计算机还有很遥远的差距。阻碍量子信息实用化的主要原因是目前还没有找到足够理想的二能级系统作为量子信息的载体—量子比特 (quantum bit)。事实上，一个物理系统要成为量子比特，有三点基本要求 [25]：(1) 能够很方便地控制有关的相互作用，以实现量子相干的逻辑操作；(2) 在逻辑门操作过程中，很好地保持其相干性，即退相干时间相对于操作的时间要足够的长；(3) 能够规模化，把单个的量子比特集成起来，形成所谓的量子网络。目前量子信息研究的主要任务就是去寻求满足上述三个要求的物理系统 (如图 1.1)。但是上述这些系统的演示性实验表明，它们暂时都只能满足上述条件中的一部分而很难满足全部要求。从目前来看，这些方案各有优劣，很难说哪一种方案更有前途。考虑到期望最终可能实现的适用型量子计算机要实行集成化和小型化，也许基于量子点和约瑟夫森结的固体系统比较有潜力，当然不排除有新的更好的量子系统的出现。

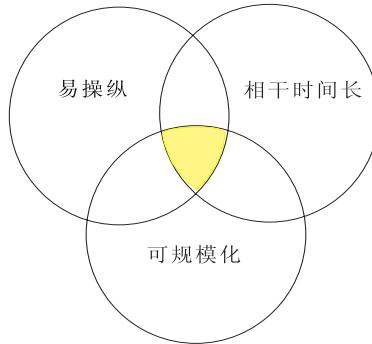


图 1.1：物理系统作为量子比特需要满足的三个基本要求：易操纵，相干时间长，可规模化。

尽管量子计算的研究还处于探索阶段，但是它相对于经典计算必然有它特

有的巨大优越性。首先，由于量子计算中的操作都是可逆的幺正操作，因此可以避免经典计算过程中由于不可逆操作所带来的能耗。更重要的是，量子计算中可以用到经典世界里所没有的量子力学的本质特性，比如量子态的相干叠加性。经典计算中的基本信息单位是比特，而量子计算的基本信息单位是量子比特。量子比特所构成的序列与经典比特序列不同的是它不但可以处于各种正交态的叠加态上，还可以处于纠缠态上。这些特殊的量子态带来了许多奇妙的性质，比如量子并行性。由于量子计算中的幺正变换是同时对量子叠加态中的每一个分量进行变换，所有这些变换同时完成后，按特定的概率幅叠加起来给出结果，这就是量子并行计算。利用这种量子并行特性，量子计算能够拥有比经典计算快的多的速度，可以解决经典计算所无法解决的一些问题。比如经典计算中的大数因子分解问题，现有的计算机对数 N (二进制长度为 $\log_2 N$) 实行质因子分解的运算步骤 (时间) 随数的长度 $\log_2 N$ 呈指数增长。1994 年为止实验上被分解的最大数为 129 位，是通过使用 1600 个工作站耗时 8 个月才完成的。如果以同样的计算功能分解 1000 位的数，则需要有 10^{25} 年。因此这种大数因子分解的不可解性质是电子银行、网络等领域的公开密钥体系 RSA 安全性的依据。但是，Shor 算法 [9] 表明，一个 1000 位的数在量子计算中只需要几分之一秒就可以实现 [26]，而且操作的时间仅仅随数的长度呈多项式增长。这样，量子算法能够将这类经典的不可解问题变成可解问题。

在量子计算成为一个新兴的研究课题的同时，量子信息学也得到了长足的发展。量子信息是指以量子力学基本原理为基础、通过量子系统的各种相干特性 (如量子并行、量子纠缠和量子不可克隆 [27, 28] 等)，进行编码和信息传输的全新信息方式。早在 1984 年，Bennett 等人提出的 BB84 量子密钥分发方案 [29] 拉开了量子信息学的帷幕。1993 年，六位科学家提出的量子隐形传态方案 [30] 是量子信息学上的又一个里程碑。随着量子计算的发展，尤其是 Shor 算法 [9] 和 Grover 算法 [11] 的提出以及实验上关于量子隐形传态的实现 [31, 32, 33, 34]，量子信息学变得越来越重要，引起了越来越多人的重视，它将会引发信息领域的一次新的革命。

§1.2 量子存储的研究进展

上节简单介绍了量子计算与量子信息以及它们所具有的强大功能和远大前景。但是回到现实，如果不能在实际中制造一个真正意义上的量子计算机，那么人们所设想的量子计算的美好前景只能是一个空话。目前人们已经基于许多系统

对量子计算开始了各方面的研究。虽然迄今为止的量子计算还仅仅处于演示的阶段，离最终的实际应用还有很遥远的距离，在技术上还有很大的障碍，但是从原理上讲，量子计算机的研制已经没有什么不可逾越的困难。而且这方面的进展非常大，前几年人们认为量子计算不可能真正实现。但现在回头看，很多人们意想不到的事情现在都出现了。比如量子密码已经达到几近实用化的程度了，下一步就是如何解决量子纠错、总集成等问题。实现量子计算和量子通讯的一个很重要的问题是量子存贮。正如经典信息的有效存贮对于经典计算和经典通讯的重要性一样，在量子计算和量子信息中，实现量子信息的存贮也是一个必要的和关键的环节。简单的说，量子存贮的含义有二种：（1）利用一个退相干时间相当长的量子系统来有效地暂时存放退相干时间相对短得多的量子操作系统的量子信息，在需要的时候又可将所存放的量子信息有效地提取出来，重新转换为量子操作系统的量子信息，并且与初始所存贮的量子信息完全一致；（2）把不易进行操作的量子系统的信息转换到局部的容易操作的量子系统，经过需要的操作或者存贮之后再将量子信息再次转换给初始的量子系统。后来我们推广了量子存贮的概念，最终转换给初始量子系统的信息不一定要与初始所存贮的量子信息完全一致，而可以存在相差某种特定关系的一个相位因子，这就是我们首次提出的几何量子存贮 [35, 36] 概念。我们同时给出了量子存贮和几何量子存贮的严格数学定义，在以后的章节中将详细介绍。当前人们的主要兴趣集中在如果构造量子算法、如何实现量子通讯、如何进行量子纠错、如何用实际的物理系统来实现量子逻辑门等方面，而对于实现量子信息存贮的研究还不是特别的多。

2003 年有人提出了利用集体核自旋来进行量子存贮的方案 [37]，这属于第一种量子存贮的范畴。众所周知，由于与环境的弱耦合，原子核的自旋具有很长的退相干时间。但是实际中单个原子核很难用来进行操作和测量。为此，他们提出了一种使用介观量子点中的集体原子核自旋来产生长稳存贮时间的技术。通过有效地控制超精细接触相互作用的自旋交换部分，可以相干地把一个任意的电子自旋叠加态映射到相近的一系列极化原子核的集体态中。当态的转换完成后，所得到的态可以在原子核系综内被存贮很长一段时间（如达到秒的量级），当需要时又可以重新转换为电子的自旋态。这样就实现了电子叠加态在原子核系综中的量子存贮。

第二种量子存贮的范畴中研究得相当多的方案是利用原子系综系统来存贮光的量子信息。光子是信息最快、最巨大的载体，它是量子通讯的必然选择，在量子计算中也有着非常重要的作用。如何现实量子光的存贮一直是具有重大意

义的课题。最近，Fleischhauer 和 Lukin 等人 [38, 39, 40, 41] 提出了使用原子系综来实现光量子信息的理论方案。因为原子在相干光场的作用下，可以形成相干叠加态。在双光子过程的三能级原子系统中，由于这种相干性可使介质产生电磁感应透明 (EIT) 现象 [42]。当光脉冲信号在 EIT 介质中传播时，其群速决定于介质的折射率，光的群速与折射率随频率变化的斜率成反比，折射率的变化越大，光的群速就越慢。在 EIT 条件下折射率随频率的变化可以远远大于 1，所以光的群速就远远小于光速。当群速减慢到零时，光脉冲完全停留在介质内，并转化为原子的自旋波储存于原子系综介质中。自旋波存贮的时间决定于原子基态的相干时间，而原子的相干时间又决定于原子的碰撞弛予、光束尺寸和各种因素对相干态的消相干效应。当用耦合光激发原子介质时，存贮的光脉冲被重新释放出来。从而完成了量子信息存贮和释放的过程，即“写”和“读”的量子信息过程。Fleischhauer 等人提出了原子系综系统中集体激发的暗态和暗态极化子的概念 [38, 39]，利用暗态极化子的绝热调控来改变系统的本征暗态，使之在光子类型的态与原子集体激发类型的态之间绝热转换，从而理论上实现了光量子信息的在 EIT 原子系综中的存贮。

从 2002 年开始，我们在如何利用原子系综存贮光量子信息方面进行了一系列理论研究。我们首先研究了三能级“原子晶体”的 EIT 情况，在大 N 极限和低激发的条件下简化了 Fleischhauer 等人 [38, 39, 40] 的方法，并发现了系统的隐藏对称性，从而求出了系统的本征能谱，大大拓展和严格化了 Fleischhauer 他们关于原子系综的量子存贮问题的讨论。利用这种方法，我们推广到了两光子共振条件下的 EIT 情况，讨论了此时如何进行量子存贮问题以及求解出了量子探测光场在此原子系综 EIT 介质中的群速度和传播问题。后来，我们进一步考虑了三能级近两光子共振 EIT 系统、四能级近三光子共振和完全三光子共振 EIT 系统的情况，发现此时在绝热操纵过程中量子态的演化会出现与操纵细节无关的几何 Berry 相因子 [43]，由此首次提出了几何量子存贮的概念。在本论文的后继章节中将详细介绍这些工作。

与此同时，量子存贮也引起实验研究上的兴趣，尤其是实验上如何实现量子光的存贮一直是个很有意义的课题，人们也相应开展了很多研究。2001 年哈佛大学的 Liu 等人 [44] 与 Lukin 等人 [45] 先后报道了通过电磁诱导透明手段将光子停贮在钠原子蒸气和铷原子蒸气中的实验，从而实现了光量子信息的存贮。实际上，对于利用电磁诱导透明技术实现经典光场的群速减慢的实验研究在此之前就开展了，比如早在 1999 年哈佛大学的 Hau 等人 [46] 就在他们的实验中成功

地在超冷原子气体中光学脉冲的群速度减少到 17 m/s。我国的上海光机所、北京大学、山西大学和武汉物理与数学所等机构的一些小组也进行了光存贮的实验研究，并取得了一定成果 [47, 48]。但是，严格说来，包括 Liu 和 Lukin 等人的实验在内，现有的所谓光存贮实验中实现的光场（波包）的群速度减慢（即使减少到 0）还不足以说明完成了量子信息的存贮。因为在实验过程中最终提取出来的光场有相当程度的能量损耗，也就是说，最终的提取出来的光场可能不再是初始入射的被存贮的光场而是有了一定的失真。不过，这些实验已经是了不起的成就了，随着实验手段的提高和技术的发展，也许可以很快实现真正意义上的光子在原子系综中的量子信息存贮。

§1.3 论文内容与章节安排

本论文主要研究如何利用电磁诱导透明的原子系综系统来实现量子光的存贮。由于光子是快速而稳定的信息载体，在量子信息和量子计算中有着极其重要的地位。另一方面，原子是稳定的、易操作的定域量子系统，而大量原子所构成的系综系统与光场的相互作用可以使其耦合得到增强。因此使用原子系综来实现量子信息就成为一个极有潜力和极具意义的课题。这就是我们的研究动机所在。

本论文的研究工作一定程度上参考了 Fleischhauer 等人 [38, 39, 40, 41] 提出的原子系综集体激发的极化子概念。但是相比于他们的研究，我们的研究工作具有以下一些明显创新点：(1) 明确提出了电磁诱导透明介质中的原子系综集体激发可以近似成一个玻色子模式，所以光量子信息在原子系综中的存贮原则上可以看成是两个模式之间的量子态的转换。这样的处理相对于他们的一般意义上集体算符的处理要相对简洁得多。(2) 首次发现了电磁诱导透明原子系综系统的隐藏对称性，求出了系统的所有集体激发的能量本征态，发现了一系列与暗态能量简并的本征态。(3) 在谈及通过调控系统参数来完成光量子信息的存贮过程时，他们仅仅是定性的说明系统参数的改变要满足绝热演化。利用我们的方法，可以从系统集体态的绝热定理出发定量求出系统的光存贮所需要满足的绝热条件，从而保证那些与暗态简并的系统本征态不会与暗态在绝热演化想混合。(4) 采用我们的方法可以很容易地求出量子探测光场在原子系综中传播时的极化率，进而求出探测光的群速度。而他们是通过求解电磁场波动方程相对复杂地得到探测光的群速度。(5) 推广了量子存贮的概念，首次提出了几何量子存贮的概念。

具体说来，本论文中我们的主要工作是研究了以下四个问题：(1) 在已有处

理三能级原子系综集体激发的 EIT 系统的量子存贮问题基础上，针对全同玻色原子系综的 EIT 系统，讨论了量子光场在该原子系综介质中的传播问题。(2) 引入原子系综集体算符的方法，以二能级原子系综为例，讨论了一般意义上原子系综与外场相互作用时所存在的一些退相干影响。(3) 在其它处理三能级原子系综集体激发 EIT 的量子存贮问题的基础上，进一步研究了基于原子晶格上的 EIT 情况，发现了其中的隐藏对称性和一系列与暗态能量简并的本征态，讨论了在这种情况下如何进行量子存贮。利用我们的隐藏对称性方法，进一步推广到了两光子共振 EIT 的情况，讨论了此时量子光的存贮和传播问题。(4) 讨论了三能级原子系综近共振 EIT 系统和四能级原子系综近三光子共振 EIT 中量子光场的存贮问题，首次提出了几何量子存贮的概念。

本论文共分为七章，其中第三章和第四章的部分内容、第五章和第六章的全部内容是我们自己的工作。各章的具体内容如下：

第一章简单介绍了量子计算与量子信息，阐述了量子存贮在量子计算中的重要性以及已有的一些量子存贮方案。

第二章说明了什么是电磁诱导透明现象，简单介绍了基于单个 Λ 型三能级原子的 EIT 机制的半经典理论处理。

第三章阐述了为何要使用原子系综集体激发的 EIT 机制来研究量子存贮，简单介绍了 Fleischhauer 等人使用原子系综集体激发 EIT 机制来实现量子存贮的方案，然后介绍我们关于光在基于电磁诱导透明的全同玻色原子系综介质中的量子光场的传播问题的研究。

第四章讨论了原子系综集体激发中存在的一般意义上的量子漏损问题。以两能级原子系综为例，从非均匀耦合和原子空间运动诱导退相干两个方面详细讨论了所带来的漏损问题以及相应的抑制方案。

第五章介绍了我们提出的基于三能级原子晶格上的 EIT 机制，阐述了其中的隐藏对称性以及系统的能谱结构。讨论了多模量子场在这种系统中的暂态传播问题。此外，推广到满足两光子共振的 EIT 机制，讨论了其中的能谱结构以及量子存贮和探测光群速度的稳态解。

第六章详细介绍几何量子存贮的研究。参照对于三能级 Λ 型原子系综完全共振 EIT 系统的研究，讨论了三能级 近 共振 EIT 系统中的几何量子存贮问题，进而研究了四能级近三光子共振 EIT 下的非阿贝尔几何量子存贮，并针对四能级完全三光子共振 EIT 系统的简化情况，详细讨论了如何利用它完成一个具体的几何存贮过程。

第七章对论文的内容做了简单的总结，并对于今后的工作提出了一些展望。

第二章 电磁诱导透明的单原子图象

本论文的主要工作是研究基于电磁诱导透明的原子系综系统中光量子信息的存贮问题。本章的第一节将简单介绍什么是电磁诱导透明，第二节介绍电磁诱导透明在单原子半经典图象下的理论处理。

§2.1 电磁诱导透明 (EIT)

早在 1961 年， Fano 就指出 [49]，如果原子通过几个可能的不同跃迁过程耦合起来，那么这些过程的振幅会由于干涉而出现总的跃迁几率的相干增强或者相干相消。这是因为在量子力学中，一个量子过程中相加的是几率幅而不是几率。一个典型的例子是原子自电离态的辐射跃迁过程中的 Fano 干涉 [49, 50]，这种预测的 Fano 干涉现象在后来的半导体量子阱中也发现了 [51]。基于这种原子不同过程之间的干涉现象，在此之后许多有关原子相干现象的研究都出现了，比方无翻转激光 (lasing without inversion)[52]、相干布居数囚禁 (coherent population trapping，简称 CPT)[53, 54]、激光诱导持续结构 (laser-induced continuum structure) [55] 等等。其中一个很重要的原子相干现象是电磁诱导透明 (Electromagnetically Induced Transparency，简称 EIT)[56]。随着激光技术的发展，激光与原子相互作用的研究成为很多科学家的课题。当与原子某个能级跃迁相共振的探测光场穿透该原子介质时，正常情况下会出现很强的吸收。如何减少这种吸收是很有意义的研究工作。1990 年 Harris 在实验上实现了这种吸收的显著减少。通过引入另外一个也与原子相互作用的电磁场，使原子的跃迁过程达到相消干涉的时候，初始的不透明的介质就会因而变得透明起来。Harris 把这种现象称之为电磁诱导透明 [56]。之后 Harris 和其他很多人开展了许许多多关于 EIT 的研究 [42, 57]。人们发现，除了能够出现透明现象外，EIT 介质的色散性质也会显著地改变，由此会出现许多奇怪的光学性质 [58, 59]。

实验上用来做 EIT 的研究的原子系统是各种各样的，有基于三能级原子机制的，也有基于四能级原子机制甚至更多能级原子机制的情况。其中三能级原子机制是最基本的，下面只对三能级 EIT 机制作些简单介绍。最基本的三能级 EIT 规则有三种：阶梯型 EIT、 Λ 型 EIT 和 V 型 EIT。其它的三能级 EIT 机制都可以约化为这三种情况 [60, 61]。如图 2.1 所示，能级 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 、 $|2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 之间是偶极跃迁允许的， $|1\rangle$ 和 $|3\rangle$ 之间是偶极禁闭的，两个跃迁分别与两个外部电磁场相互作用。有时候，如果考虑到能级 $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 的 Zeeman 分裂，那么会形成很多个穿插在一起的上述 EIT 规则，一般地这种情况可以简化到三能

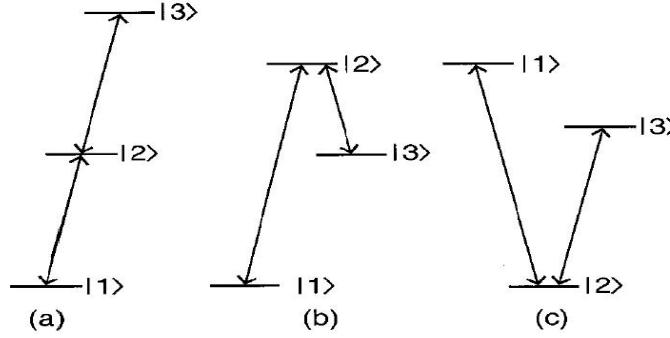


图 2.1: 基本的 EIT 示意图: 三能级原子与两个近共振电磁场相互作用, 其中仅有 $|1\rangle$ 和 $|3\rangle$ 之间不耦合。三种规则分别称为: (a) 阶梯型; (b) Λ 型; (c) V 型。
摘自文献 [60]。

级的情况, 实验上不会有太大的差别。实验上对于 EIT 的研究非常之多了, 这方面的研究可以参考 Marangos 的综述文献 [60]。需要指出的是, 随着实验上的发展, EIT 可以发生在热原子系综气体中, 也可以发生在(超)冷原子气体中, 在的玻色爱因斯坦凝聚的原子介质中也可以发生。

§2.2 EIT 机制的半经典单原子图象处理

迄今为止, 有关 EIT 的实验研究非常丰富, 相应的理论处理也有很多。一般地, 人们是从单个原子与光场相互作用的半经典处理出发来研究 EIT 问题。本节参照文献 [62], 以三能级 Λ 型原子为例, 简单推导 EIT 系统中的所谓暗态, 以及求解系统中的极化率, 从而说明 EIT 系统为何会出现诱导现象, 色散性质会如何改变。

如图 2.2 所示, 三能级原子 (能级分别为 ω_a 、 ω_b 、 ω_c) 的两个跃迁分别与两个频率为 ν_1 、 ν_2 的两个单模经典光场耦合。在旋转波近似下, 单原子与两个单模光场的哈密顿量为

$$H = H_0 + H_1, \quad (2.1)$$

其中,

$$H_0 = \hbar\omega_a |a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b |b\rangle\langle b| + \hbar\omega_c |c\rangle\langle c|, \quad (2.2)$$

$$H_1 = -\frac{\hbar}{2} (\Omega_1 e^{-i\phi_1} e^{-i\nu_1 t} |a\rangle\langle b| + \Omega_2 e^{-i\phi_2} e^{-i\nu_2 t} |a\rangle\langle c|) + h.c.. \quad (2.3)$$

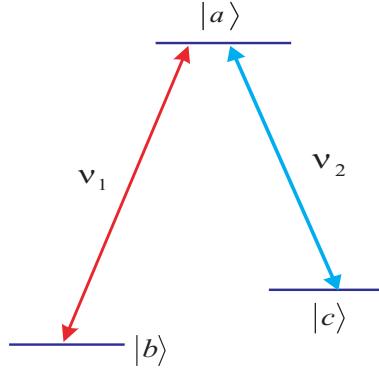


图 2.2: 三能级 Λ 型原子示意图, 两束经典光场分别与两原子跃迁共振耦合。

这里, $\Omega_1 e^{-i\phi_1}$ 和 $\Omega_2 e^{-i\phi_2}$ 分别为两个光场的 Rabi 频率, 其中 $\Omega_{1,2}$ 是其幅值, $e^{-i\phi_{1,2}}$ 是其相位。

一般地, 原子波函数的形式可以写为:

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t) e^{-i\omega_a t} |a\rangle + c_b(t) e^{-i\omega_b t} |b\rangle + c_c(t) e^{-i\omega_c t} |c\rangle, \quad (2.4)$$

系数 $c_a(t)$ 、 $c_b(t)$ 和 $c_c(t)$ 表示相应的几率幅, 其运动方程由薛定谔方程 $i\hbar \dot{|\psi\rangle} = H |\psi\rangle$ 决定:

$$c_a(t) = \frac{i}{2} (\Omega_1 e^{-i\phi_1} c_b + \Omega_2 e^{-i\phi_2} c_c), \quad (2.5)$$

$$c_b(t) = \frac{i}{2} \Omega_1 e^{i\phi_1} c_a, \quad (2.6)$$

$$c_c(t) = \frac{i}{2} \Omega_2 e^{i\phi_2} c_a, \quad (2.7)$$

其中假定了两个光场分别与原子跃迁 $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ 和 $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ 共振耦合, 也就是说: $\nu_1 = \omega_{ab} = \omega_a - \omega_b$, $\nu_2 = \omega_{ac} = \omega_a - \omega_c$ 。现在假设初始时刻原子处于 $|b\rangle$ 态和 $|c\rangle$ 态的叠加:

$$|\psi(0)\rangle = \cos(\theta/2) |b\rangle + \sin(\theta/2) e^{i\psi} |c\rangle. \quad (2.8)$$

那么根据运动方程 (2.5, 2.6, 2.7) 有:

$$c_a(t) = \frac{i \sin(\Omega t/2)}{\Omega} [\Omega_1 e^{-i\phi_1} \cos(\theta/2) + \Omega_2 e^{-i(\phi_2+\varphi)} \sin(\theta/2)], \quad (2.9)$$

$$c_b(t) = \frac{1}{\Omega^2} \{ [\Omega_2^2 + \Omega_1^2 \cos(\Omega t/2)] \cos(\theta/2)$$

$$-2\Omega_1\Omega_2e^{i(\phi_1-\phi_2-\psi)}\sin^2(\Omega t/4)\sin(\theta/2)\}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} c_c(t) = & \frac{1}{\Omega^2}\{-2\Omega_1\Omega_2e^{-i(\phi_1-\phi_2)}\sin^2(\Omega t/4)\cos(\theta/2) \\ & + [\Omega_1^2 + \Omega_2^2 \cos(\Omega t/2)]e^{-i\psi}\sin(\theta/2)\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中 $\Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$ 。

很显然，当满足：

$$\Omega_1 = \Omega_2, \quad \theta = \pi/2, \quad \phi_1 - \phi_2 - \psi = \pm\pi \quad (2.12)$$

时，能够发生相干捕获，也就是说，当满足

$$c_a(t) = 0, \quad (2.13)$$

$$c_b(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.14)$$

$$c_c(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\varphi}, \quad (2.15)$$

原子将稳定地布居于两个能量较低的态，此时对于当前的光场来说，原子对其将没有吸收。进一步的计算表明，其实只需要满足

$$\tan\theta/2 = \Omega_1/\Omega_2, \quad \phi_1 - \phi_2 - \psi = \pm\pi, \quad (2.16)$$

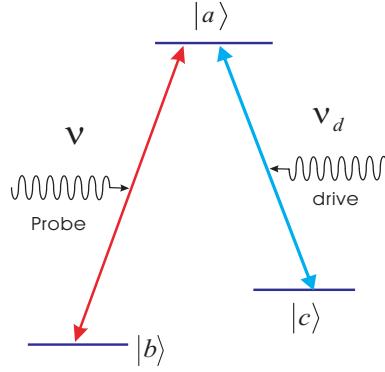
原子就处于相干捕获的状态

$$|\psi(t)\rangle = \frac{\Omega_2|b\rangle - \Omega_1|c\rangle}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}, \quad (2.17)$$

在原子物理中这种态称为暗态 (dark state)。暗态是相干布居捕获和电磁诱导透明中的一个非常重要的概念。

下面介绍探测光在电磁诱导透明原子介质中的传播。一般情况下，人们引入原子跃迁的衰减，通过研究单原子密度矩阵在经典光场作用下的稳态解，就可以求出探测光场在原子介质中的极化率，从而求解出探测光场的群速度。为方便起见，将所考虑的三能级系统稍做修改，如图 2.3，能级 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 之间的跃迁与幅值为 ε 频率为 ν 的探测电磁场相耦合，能级 $|a\rangle$ 和 $|c\rangle$ 之间的跃迁与频率为 ν_d 的强驱动场相耦合 (有时也叫耦合场)，耦合的复 Rabi 频率为 $\Omega_d e^{-i\phi_d}$ ，密度矩阵非对角元 ρ_{ab} 、 ρ_{ac} 、 ρ_{cb} 的衰减率分别为 γ_1 、 γ_2 、 γ_3 。与前面求解暗态时的情况相比，实际上只是进行了下列取代：

$$\Omega_1 e^{-i\phi_1} e^{-i\nu_1 t} = \frac{\Omega_{ab}\varepsilon}{\hbar} e^{-i\nu t}; \quad \Omega_2 e^{-i\phi_2} e^{-i\nu_2 t} = \Omega_d e^{-i\phi_d} e^{-i\nu_d t}. \quad (2.18)$$

图 2.3: 三能级 Λ 型原子 EIT 示意图。

那么，密度矩阵元的演化方程有：

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{ab} &= -(i\omega_{ab} + \gamma_1)\rho_{ab} - \frac{i\wp_{ab}\varepsilon}{2\hbar}e^{-i\nu t}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) \\ &\quad + \frac{i\Omega_d}{2}e^{-i\phi_d}e^{-i\nu_d t}\rho_{cb},\end{aligned}\tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{cb} &= -(i\omega_{cb} + \gamma_3)\rho_{ab} - \frac{i\wp_{ab}\varepsilon}{2\hbar}e^{-i\nu t}\rho_{ca} \\ &\quad + \frac{i\Omega_d}{2}e^{i\phi_d}e^{i\nu_d t}\rho_{ab},\end{aligned}\tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{ac} &= -(i\omega_{ac} + \gamma_2)\rho_{ac} - \frac{i\Omega_d}{2}e^{i\phi_d}e^{-i\nu_d t}(\rho_{aa} - \rho_{cc}) \\ &\quad + \frac{i\wp_{ab}\varepsilon}{2\hbar}e^{-i\nu t}\rho_{bc}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

原子介质对探测场的色散和吸收是由 $\rho_{ab}^{(1)}$ 来决定的，因此只需要考虑到 ε 的最低阶的极化。而由于驱动场很强，所以对于 Ω_d 要保留到所有阶。

当初始时原子基本处于基态 $|b\rangle$ 时，有

$$\rho_{bb}^{(0)} = 1, \quad \rho_{aa}^{(0)} = \rho_{cc}^{(0)} = \rho_{ca}^{(0)} = 0.\tag{2.22}$$

将上述值代入方程 (2.19, 2.20)，并且做以下代换

$$\rho_{ab} = \tilde{\rho}_{ab}e^{-i\nu t},\tag{2.23}$$

$$\rho_{cb} = \tilde{\rho}_{cb}e^{-i(\nu + \omega_{ca})t},\tag{2.24}$$

可以得到下列方程

$$\partial_t \tilde{\rho}_{cb} = -(\gamma_1 + i\Delta)\tilde{\rho}_{ab} + \frac{i\wp_{ab}\varepsilon}{2\hbar} + \frac{i\Omega_d}{2}e^{-i\phi_d}\tilde{\rho}_{cb},\tag{2.25}$$

$$\partial_t \tilde{\rho}_{cb} = -(\gamma_3 + i\Delta)\tilde{\rho}_{cb} + \frac{i\Omega_d}{2}e^{i\phi_d}\tilde{\rho}_{ab},\tag{2.26}$$

其中 $\Delta = \omega_{ab} - \nu$ 是探测光的失谐，并假设了 $\nu_d = \omega_{ac}$ 。

上述方程是可解的，首先写成矩阵形式：

$$\dot{R} = -MR + A, \quad (2.27)$$

其中

$$R = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{ab} \\ \tilde{\rho}_{cb} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} i\wp_{ab}\varepsilon/2\hbar \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

$$M = \begin{bmatrix} \gamma_1 + i\Delta & \frac{-i\Omega_d}{2}e^{-i\phi_d} \\ \frac{-i\Omega_d}{2}e^{i\phi_d} & \gamma_3 + i\Delta \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

然后进行积分有

$$R(t) = \int_{-\infty}^t e^{-M(t-t')} Adt = M^{-1}A, \quad (2.30)$$

这样可以得到：

$$\rho_{ab}(t) = \frac{i\wp_{ab}\varepsilon e^{-i\nu t}(\gamma_3 + i\Delta)}{2\hbar[(\gamma_1 + i\Delta)(\gamma_3 + i\Delta) + \Omega_d^2/4]}. \quad (2.31)$$

利用

$$p = \epsilon_0\chi\varepsilon = 2\wp\rho_{ab}e^{i\nu t}, \quad (2.32)$$

再定义极化率 $\chi = \chi' + i\chi''$ ，可以求出极化率的实部和虚部分别为

$$\chi' = \frac{N_a |\wp_{ab}|^2 \Delta}{\epsilon_0 \hbar Z} [\gamma_3(\gamma_1 + \gamma_3) + (\Delta^2 - \gamma_1\gamma_3 - \Omega_d^2/4)], \quad (2.33)$$

$$\chi'' = \frac{N_a |\wp_{ab}|^2}{\epsilon_0 \hbar Z} [\Delta^2(\gamma_1 + \gamma_3) - \gamma_3(\Delta^2 - \gamma_1\gamma_3 - \Omega_d^2/4)], \quad (2.34)$$

其中 N_a 是原子介质的密度， $Z = (\Delta^2 - \gamma_1\gamma_3 - \Omega_d^2/4)^2 + \Delta^2(\gamma_1 + \gamma_3)^2$ 。

众所周知， χ' 和 $i\chi''$ 分别与色散和吸收相关联。图 2.4 (b) 给出了上述极化率归一化的数值结果，其中失谐以 γ_1 为单位， $\Omega_d = 2\gamma_1$ ，且 $\gamma_1 \gg \gamma_3$ ($\gamma_1 = 10000\gamma_3$)。可见，在完全共振的情况下，即 $\Delta = 0$ 时，极化率的虚部和实部都等于 0。虚部为 0 意味着没有对探测场的吸收，实部为 0 意味着介质的折射率为 1。图 2.4 (a) 给出的是同样的原子系统在没有驱动场（或者驱动场强度为 0）时的原子极化率实部和虚部的情况。可见在共振情况下原子对探测光场的吸收最大。因此，这种在加入一个强驱动场的情况下可以导致原本会被原子介

质共振吸收的探测光场变得透明起来，这就是电磁诱导透明的原因和由来。从图 2.4(a) 和图 2.4(b) 的比较可以很清楚地看到，由于强驱动光的出现，使得本来因为与原子跃迁共振而被吸收的探测光场在共振频率附近出现了一个透明的窗口。详细的计算可以表明，这个诱导的透明窗口的宽度随着驱动场的强度的增大而增宽。也就是说，强驱动光的出现改变了介质的色散关系，使得探测光场有一个无吸收（或弱吸收）的频率“窗口”。此外，注意到在 $\Delta = 0$ 附近区域， χ' 约等于 0， χ'' 正比于 Δ 。而人们知道探测光群速度取决于折射率对频率的倒数，所以从图 2.4(b) 可以看到，虽然折射率和折射指数没有改变，可是群速度指数会发生很大的改变，由此会导致出现很大的群速度折射指数。这就是在 EIT 实验中发现波包传播变慢的原因。

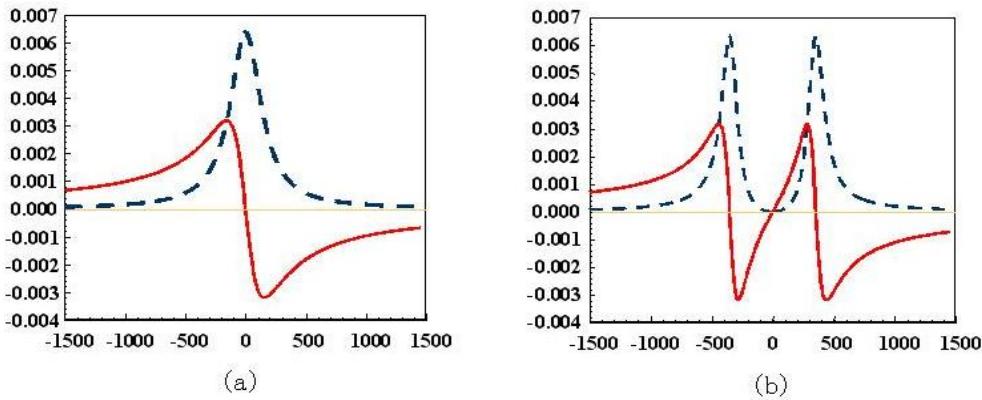


图 2.4: 探测光极化率的实部与虚部。 (a) 没有驱动场的情况; (b) 有驱动场时的情况。

需要指出的是，后来的实验 [65] 和理论 [66] 都表明，EIT 现象的出现并不需要满足严格的单光子共振，也就是说并不需要两个光场的频率 ν 、 ν_d 分别与 ω_{ab} 、 ω_{ac} 相等。实际上只需要满足：

$$\nu - \nu_d = \omega_{ab} - \omega_{ac} = \omega_{cb}, \quad (2.35)$$

也就是说满足两光子共振的条件时，就会产生 EIT 现象。

早期研究 EIT 现象的理论处理基本上都是基于上述的单原子半经典的处理图象。通过考虑单个三能级原子与经典光场的相互作用可以确定系统的本征暗态。当考虑到原子的衰减时可以用稳态近似求出经典光场传播时的群速度。从这种基本的思想出发，人们理论上可以处理许许多多的 EIT 机制。比方有人研究

了简并的两能级系统的 EIT 问题 [63, 64]。有人考虑了四能级原子与经典光场相互作用的 EIT 问题，此时会出现一些新奇的性质比如非阿贝尔的几何相因子 [67] 和四波混频现象 [68, 69, 70]。有人考虑了包含原子空间运动时的三能级原子 EIT 的情况，发现此时会有探测光场的负群速度的出现 [71]。后来有人突破了经典光场的限制，研究了单光子（场）与原子的相互作用 [72, 73]。也有人采用了非稳态近似的方法 [74] 来求解 EIT 问题。总之，各种各样的理论方法层出不穷，所研究的 EIT 系统也千差万别。

第三章 EIT 的集体图象与光量子存贮

上一章主要介绍了以前关于理论上处理 EIT 问题时常用的基于单原子的半经典方法。但是，在处理原子与原子相互作用的过程中，基于单原子的半经典理论会存在一些理论上的缺陷。比如当考虑原子的超辐射 [75] 和超荧光 [76] 问题或者是考虑量子光场与原子系统相互作用时，就需要从所有原子的集体作用出发来考虑。注意到随着玻色凝聚现象 [77] 于 1995 年在实验上的实现 [78, 79, 80]，实验上的 EIT 现象也在全同原子的玻色爱因斯坦凝聚体观察到了 [81]。理论上处理玻色凝聚体与光场的相互作用，必然要从原子整体特性出发来考虑。此外，当考虑量子探测光场在基于 EIT 的原子系统（或者玻色凝聚体）介质中传播时，自然地就出现了光的量子存贮问题。本章第一节主要介绍为何可以使用基于 EIT 的原子系统集体激发系统来处理量子存贮。第二节简单介绍 Fleischhauer 和 Lukin 等人 [38, 39, 40, 41] 基于原子系统集体激发的图象来处理量子探测光场在原子系统中的传播和存贮的方法。第三节介绍我们关于全同玻色原子系统 EIT 系统的研究。

§3.1 光量子存贮与 EIT

第一章曾经提到，随着量子信息和量子计算的发展，量子信息的存贮问题是实现真正适用的量子计算的一个重要环节。由于光子是量子信息理想的快速的载体，而原子是稳定且局域的信息存贮单位，考虑光的量子信息的存贮是一个极有意义和价值的课题。

为此这里先回顾一下经典光场在时频上的数据存贮。基于自旋回波 [82] 和光学回波 [83] 来进行数据存贮的例子有很长的历史了。自从第一个受激二能级光学回波 [84] 的方案以及那些演示光脉冲存贮的系统 [85] 出现后，在这个领域中有了许多重要的技术上的发展。其中尤为感兴趣的是基于拉曼光回波 (Raman Photon Echoes) 的技术。因为它们结合了具有长稳时间的原子超精细（或者 Zeeman）基态和光场来存贮数据 [86]。然而，尽管这些技术对于高容量的经典光学数据的存贮是很有效的，但是它们不能用于量子信息存贮过程。因为这些技术要么是直接利用压缩态光学泵浦而存在耗散，要么是停留在物质与光学（而不是光子）层次上的转换过程。因此，它们不能够进行基于几个光子数量级上的操纵，所以不能应用于量子信息存贮过程中。

概念上最简单的光量子存贮的方法是把一个单光子存贮在一个独立的原子中。这样的方法涉及到单原子中单光子的相干吸收和相干发射。然而，单原子吸

收的横截面非常之小，这样的光存贮过程的效率是非常之低的。解决这个问题的一个巧妙的办法是利用量子电动力学腔 [15, 16]。把一个原子放在一个高 Q 的量子电动力学腔中，由于光子在腔里来回地跑动，因此它的横截面积将会有效地提高，这就使得实现一个有效的转换成为可能。由于其外部控制场是依赖于时间来控制的，所以基于拉曼绝热过程 [87] 的技术可以用来直接实现一个光子态到原子态的量子信息转换（如相干吸收）。然而，尽管在这个领域上实验上有很多的进展 [88]，但是要达到技术上所谓的强耦合区域是很难的，而且由此构造出的单原子系统是很脆弱的，其操作的速度也极大地受到高 Q 因子的限制。

最近，Fleischhauer 和 Lukin 等人提出了一种方法 [38, 39, 40]，即通过三能级原子系综中的电 Duan 这种方法既通过使用多原子系统提高了吸收截面，又通过使用绝热过程的技术来避免耗散。因为它不需要单原子时高 Q 腔的严格限制，所以可以作为实现快速的可靠的量子网络的基础。近来的实验 [44, 45, 89] 也已经说明了这个技术的一个基本原理—基于暗态极化子的动力学群速度减慢和绝热操作。

如上章所述，由于其量子干涉性，电磁诱导透明可以使一个光场在本来与之共振的不透明的介质中传播时变得“透明”。与透明相联系的是其色散关系会发生很大的改变，这就使得光场的群速度可以有显著的减少 [46]。由于群速度的减慢是线性过程，所以所减慢的光脉冲的量子信息就被存贮起来了。所以说，这样一个具有慢光效果且不存在光吸收的介质，事实上形成了一个暂时的存贮装置。当然，那样的一个系统其存贮能力也是受限制的。尤其是其存贮时间与脉冲长度的比例是由介质不透明度的平方根所限制的 [90]，实际上的数值还处于 10 到 100 这样的数量级。这种限制来源于这样一个事实：群速度的大小是与 EIT 窗口所能容纳的宽窄相联系的 [91]。因此，更长的延迟时间必须有更大的初始脉冲长度。

慢光传播能够用来实现量子态存贮的物理机制在于准粒子的存在，这种准粒子称之为暗态极化子 (DSP) [38, 39]。暗态极化子是电磁场和原子集体激发（自旋波）的线性叠加而形成的一个准粒子。两者之间的混合角是由原子的密度以及外部控制场的强度来决定的，它决定了光场的传播速度。一个关键的思想是通过混合角的动力学旋转可以绝热地使系统从一个纯光子类型的态转换为纯原子集体激发类型的态，从而使得初始的光子波包完全停留在原子介质中。在一段时间之后，进行相反的混合角的旋转过程，可以恢复到初始时的光子波包。因此，在 EIT 原子介质中，利用群速度的动力学减慢以及极化子的绝热操作这样两个

手段，可以使之作为一个基本的有效量子存贮体。

§3.2 原子系综中 EIT 的集体激发图象

本节将主要介绍 Fleischhauer 等人在文献 [38, 39] 中关于量子光场与原子系综相互作用的 EIT 集体激发处理图象。首先引入暗态极化子算符，并对其性质进行分析，然后进一步讨论如何应用它来产生一个可逆的、快速的、高保真度的光量子存贮过程。

所考虑的系统如图 3.1 所示：包含有 N 个三能级 Λ 型原子的系综与两个单模光场相互作用。每个原子的 $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ 跃迁与量子光场相共振耦合， $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ 跃迁与 Rabi 频率为 Ω 的经典控制场共振耦合。系统的动力学由以下相互作用哈密顿量来决定

$$H = \hbar g \sum_{i=1}^N a\sigma_{ab}^{(i)} + \hbar\Omega(t) \sum_{i=1}^N \sigma_{ac}^{(i)} + \text{h.c.} \quad (3.1)$$

其中， $\sigma_{\mu\nu}^{(i)} = |\mu\rangle_{ii}\langle\nu|$ 是第 i 个原子的内态 $|\mu\rangle$ 和 $|\nu\rangle$ 之间的反转算符。 g 是原子与量子化光场的耦合常数（真空 Rabi 频率）。为方便起见， g 和 Ω 假定是实的且对所有的原子是等同的。

当初始时刻所有的原子都呆在能级 $|b\rangle$ 时，那么在以后的动力学演化中，原子系统将一直处于那么总体对称化的 Dicke 态 [92]：

$$|\mathbf{b}\rangle = |b_1, b_2, \dots, b_N\rangle, \quad (3.2)$$

$$|\mathbf{a}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N |b_1, \dots, a_j, \dots, b_N\rangle, \quad (3.3)$$

$$|\mathbf{c}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N |b_1, \dots, c_j, \dots, b_N\rangle, \quad (3.4)$$

$$|\mathbf{aa}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N(N-1)}} \sum_{i \neq j=1}^N |b_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, b_N\rangle, \quad (3.5)$$

.....

特别地，如果初始时量子光场处于真空态，那么整个系统处于态 $|\mathbf{b}, 0\rangle$ ，这个态根本不会受到相互作用哈密顿量 H 的影响。如果初始时光场存在一个光子，那么在演化中系统可能处于态 $|\mathbf{b}, 1\rangle$ ，也可能处于原子集体的单激发态 $|\mathbf{a}, 0\rangle$ 和 $|\mathbf{c}, 0\rangle$ 。对于初始时有两个光子时，演化中涉及到双激发的情况，在相互作用哈密顿量作用下将包含有 6 项，如图 3.1(b) 所示。

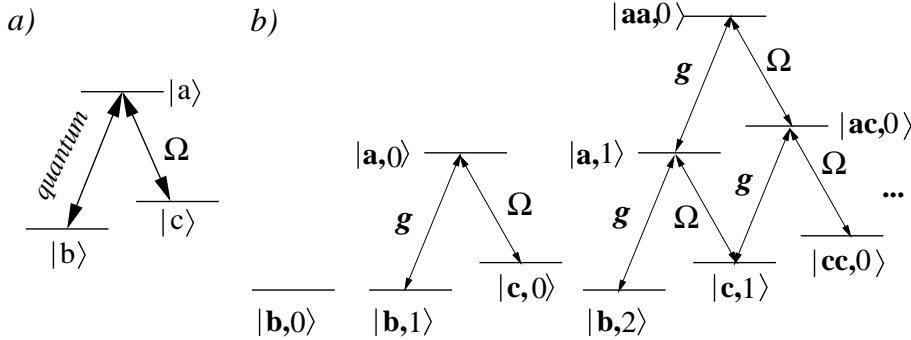


图 3.1: (a) 三能级原子与单模量子光场以及 Rabi 频率为 $\Omega(t)$ 的经典控制场耦合示意图; (b) 在相互作用哈密顿量作用下态的关联图。摘自文献 [39]。

相互作用哈密顿量具有一系列所谓的暗态，也就是本征值为 0 的绝热本征态 [15, 16, 38]。其中最为简单的暗态为：

$$|D, 1\rangle = \cos \theta(t) |b, 1\rangle - \sin \theta(t) |c, 0\rangle, \quad (3.6)$$

$$\tan \theta(t) = \frac{g\sqrt{N}}{\Omega(t)}. \quad (3.7)$$

最一般的暗态形式为：

$$|D, n\rangle = \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{n!}{k!(n-k)!}} (-\sin \theta)^k (\cos \theta)^{n-k} |\mathbf{c}^k, n-k\rangle. \quad (3.8)$$

从上述表达式可以看到，由于暗态不包含有单原子激发态 $|a\rangle$ ，所以它不涉及到原子激发态的自发辐射。一般地，亚稳态 $|c\rangle$ 的寿命远远大于激发态 $|a\rangle$ ，因此，上述的暗态在实验上是很稳定的。另一方面，虽然所有暗态的能量是简并的，但是只要不考虑原子的自发辐射，它们就会因为分属于不同的解耦子系统。这就意味着，它们相互之间不会存在跃迁。

这些集体的暗态的存在提供了一种非常优美的用来实现单模光场的量子态向原子集体激发态转换的方法。绝热地旋转混合角 θ ，使之从 0 变化到 $\pi/2$ ，就可以实现光场态向集体激发态的转换（前提是总的集体激发数 n 小于原子总数 N ）。这一点可以很清楚地从暗态的表述式 (3.8) 中看出：如果 $\theta : 0 \rightarrow \pi/2$ ，那么对于所有的 $n \leq N$ ，有

$$|D, n\rangle : |\mathbf{b}\rangle |n\rangle \longrightarrow |\mathbf{c}^n\rangle |0\rangle. \quad (3.9)$$

如果初始时刻单模光场的量子态是由密度矩阵

$$\hat{\rho}_f = \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle\langle m| \quad (3.10)$$

表示的任意混合态或者纯态，那么转换过程产生的集体激发的量子态为：

$$\hat{\rho}_f : \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle\langle m| \otimes |\mathbf{b}\rangle\langle \mathbf{b}| \longrightarrow |0\rangle\langle 0| \otimes \sum_{n,m} \rho_{nm} |\mathbf{c}^n\rangle\langle \mathbf{c}^m|. \quad (3.11)$$

混合单模光场的信息也能够全部转移到原子系综中。如果实施上述过程的相反的操作，就可以把存贮在原子系综中的信息重新转换到光场的信息之中。这样就完成了光量子信息存贮的一个完整的过程。

众所周知，光是最快的最简单的而又稳定的信息传播载体，但是它很难存贮和进行量子操作。而原子是相对稳定的、容易进行量子信息处理的载体。因此，最近以来，上述利用电磁诱导介质的原子系综来处理量子信息和进行量子计算成为一个新兴的研究课题，实验上很多相应的工作也开展了 [93, 94, 95]。

以下来考虑量子探测光场在介质中的传播问题。光场与物质之间量子态的绝热转换一般是与腔内的 EIT 联系在一起的 [96]。为了把这个方法推广到多模的情况，首先需要考虑光场在三能级原子系综的 EIT 介质中的传播。

考虑如图 3.2 所示的准一维问题。一个量子化的电磁场与原子基态 $|b\rangle$ 态到激发态 $|a\rangle$ 的跃迁共振耦合，量子场的电场正频分量为 $\hat{E}^{(+)}$ ， $\nu = \omega_{ab}$ 是光场的频率。激发态 $|a\rangle$ 到亚稳态 $|c\rangle$ 的跃迁与 Rabi 频率为 Ω 的相干经典控制场共振耦合。

那么系统的相互作用哈密顿量为：

$$\begin{aligned} \hat{V} = & -\wp \sum_j \left(\hat{\sigma}_{ab}^{(j)} \hat{E}^{(+)}(z_j, t) + h.c. \right) \\ & -\hbar \sum_j \left(\hat{\sigma}_{ac}^{(j)} \Omega(z_j, t) e^{i(k_d^\parallel z_j - \nu_d t)} + h.c. \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中 z_j 表示第 j 个原子的位置， \wp 表示 $|a\rangle$ 态与 $|b\rangle$ 态之间的偶极矩阵元，且

$$\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{(j)} \equiv |\alpha\rangle_{jj}\langle \beta| \quad (3.13)$$

定义为原子的反转算符。 $k_d^\parallel = \vec{k}_d \cdot \vec{e}_z = \frac{\nu_d}{c} \cos \vartheta$ 是控制场的波矢在量子探测场波矢方向上的投影。为简单起见，这里定义量子场和经典控制场的频率 ν 和 ν_d 分

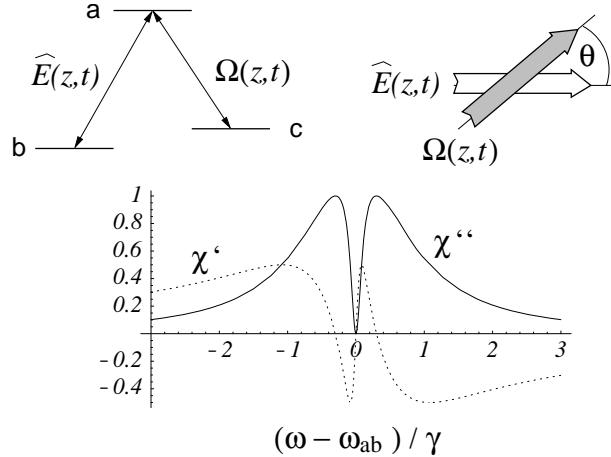


图 3.2: 顶部: Λ 型三能级原子介质与经典控制场 (Rabi 频率为 $\Omega(t)$) 以及量子场 $\hat{E}(z, t)$ 共振耦合。底部: 探测场 \hat{E} 的典型的磁化系数对失谐量的函数。实部 χ' 表示对折射指数的贡献, 虚部 χ'' 表示吸收。摘自文献 [39]。

别与原子跃迁频率 ω_{ab} 和 ω_{ac} 一致。空间运动的影响以及相应的 Doppler 位移的影响先不考虑。引入以下缓变的参量

$$\hat{E}^{(+)}(z, t) = \sqrt{\frac{\hbar\nu}{2\varepsilon_0 V}} \hat{E}(z, t) e^{i\frac{\nu}{c}(z-ct)}, \quad (3.14)$$

$$\tilde{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)}(t) = \tilde{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)}(t) e^{-i\frac{\omega_{\mu\nu}}{c}(z-ct)}, \quad (3.15)$$

其中 V 是量子化体积, 为了简单起见选择与相互作用的原子系综体积相等。

在包含有 $N_z \gg 1$ 个原子的一小段间隔 Δz 内, 可以引入连续的原子参量:

$$\tilde{\sigma}_{\mu\nu}(z, t) = \frac{1}{N_z} \sum_{z_j \in N_z} \tilde{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)}(t), \quad (3.16)$$

考虑用积分取代对原子的求和: $\sum_{j=1}^N \rightarrow \frac{N}{L} \int dz$, 其中 N 是原子的总数目, L 是量子光场传播方向上原子与光场相互作用区域的长度。取代之后, 可将哈密顿量写成连续的形式

$$\hat{V} = - \int \frac{dz}{L} [\hbar g N \tilde{\sigma}_{ab}(z, t) \hat{E}(z, t) + \hbar \Omega(z, t) e^{i\Delta kz} N \tilde{\sigma}_{ac}(z, t) + h.c.]. \quad (3.17)$$

这里, $g = \wp \sqrt{\frac{\nu}{2\hbar\varepsilon_0 V}}$ 是量子场与原子的耦合系数, $\Delta k = k_d^\parallel - k_d = \frac{\omega_{ac}}{c} (\cos \vartheta - 1)$ 。

量子光场电场部分的演化可以用其慢变幅值的传播方程来描述 [97]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\mathcal{E}}(z, t) = igN \tilde{\sigma}_{ba}(z, t). \quad (3.18)$$

原子部分的演化由以下的 Heisenberg-Langevin 方程来决定

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}}_{aa} &= -\gamma_a \tilde{\sigma}_{aa} - ig(\hat{\mathcal{E}}^\dagger \tilde{\sigma}_{ba} - h.c.) \\ &\quad - i(\Omega^* e^{-i\Delta kz} \tilde{\sigma}_{ca} - h.c.) + F_a, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{bb} = \gamma \tilde{\sigma}_{aa} + ig(\hat{\mathcal{E}}^\dagger \tilde{\sigma}_{ba} - h.c.) + F_b, \quad (3.20)$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{cc} = \gamma' \tilde{\sigma}_{aa} + i(\Omega^* e^{-i\Delta kz} \tilde{\sigma}_{ca} - h.c.) + F_c, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}}_{ba} &= -\gamma_{ba} \tilde{\sigma}_{ba} + ig\hat{\mathcal{E}}(\tilde{\sigma}_{bb} - \tilde{\sigma}_{aa}) \\ &\quad + i\Omega e^{i\Delta kz} \tilde{\sigma}_{bc} + F_{ba}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}}_{ca} &= -\gamma_{ca} \tilde{\sigma}_{ca} + i\Omega e^{i\Delta kz} (\tilde{\sigma}_{cc} - \tilde{\sigma}_{aa}) \\ &\quad + ig\hat{\mathcal{E}}\tilde{\sigma}_{ba} + F_{ca}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{bc} = i\Omega^* e^{-i\Delta kz} \tilde{\sigma}_{ba} - ig\hat{\mathcal{E}}\tilde{\sigma}_{ac}, \quad (3.24)$$

其中， $\gamma_a = \gamma + \gamma'$ 和 γ, γ' 表示纵向的衰减， $\gamma_{\mu\nu}$ 表示纵向的衰减； F_μ and $F_{\mu\nu}$ 是满足 δ 关联的 Langevin 噪声算符，对其精确形式在这里我们不感兴趣，所以没有明显给出。

为了求解量子光场的传播问题，现假设量子场的真空 Rabi 频率远远小于经典场的 Rabi 频率 Ω ，且入射量子场的光子数远远小于原子总数。在这种情况下，求解原子部分的方程时可以把 $\hat{\mathcal{E}}$ 当做微扰处理。在 0 阶近似下，其它原子算符都为 0，仅仅 $\tilde{\sigma}_{bb} = 1$ 。一阶近似下，由方程 (3.24) 可得：

$$\tilde{\sigma}_{ba} = -\frac{i}{\Omega^*} e^{i\Delta kz} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\sigma}_{bc}. \quad (3.25)$$

将上式代入方程 (3.18)，可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\mathcal{E}}(z, t) = \frac{gN}{\Omega^*} e^{i\Delta kz} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\sigma}_{bc}. \quad (3.26)$$

此外，根据方程 (3.22) 可以得到：

$$\tilde{\sigma}_{bc} = -\frac{g\hat{\mathcal{E}}}{\Omega} e^{-i\Delta kz} - \frac{i}{\Omega} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_{ba} \right) \left(-\frac{i}{\Omega^*} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\sigma}_{bc} \right) + e^{-i\Delta kz} F_{ba} \right]. \quad (3.27)$$

如果假定 Ω 的改变是足够的缓慢，比方说满足系统演化的绝热条件 [90]，那么传播方程是可以进一步简化的。此外，考虑令 $\tilde{t} = t/T$ 按特征时间 T 将时间归一化，将公式 (3.27) 按 $1/T$ 展开，在最低阶近似下有：

$$\tilde{\sigma}_{bc}(z, t) = -g \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\Omega} e^{-i\Delta kz}. \quad (3.28)$$

上式中还利用了噪声算符 F_{ba} 在绝热近似下无贡献的性质，因为 $\langle F_x(t)F_y(t') \rangle \sim \delta(t-t') = \delta(\tilde{t}-\tilde{t}')/T$ 。因此，在绝热近似下经过上述微扰处理，量子光脉冲的传播由下式决定：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\mathcal{E}}(z, t) = -\frac{g^2 N}{\Omega^*} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\hat{\mathcal{E}}(z, t)}{\Omega}. \quad (3.29)$$

如果 $\Omega(z, t) = \Omega(z)$ 不随时间改变，那么方程 (3.29) 可以进一步简化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\mathcal{E}}(z, t) = 0, \quad (3.30)$$

其中，

$$v_g = v_g(z) = \frac{c}{1 + n_g(z)}, \quad n_g(z) = \frac{g^2 N}{|\Omega(z)|^2}. \quad (3.31)$$

v_g 就是量子光场在该原子介质中传播时的群速度。

以上是在稳态条件下讨论了量子场在 EIT 介质中的传播。在稳态条件下，也就是说，控制场仅仅与随空间改变而不随时间变化，那么系统的哈密顿量 (3.1) 是不含时的，此时一个容许量子态从光子类型向原子系综集体激发类型的转换的相干过程是不存在的。要获得这样一个过程，必须允许控制场是可以随时间改变的。对于一个空间均匀但是依赖于时间的控制场 $\Omega = \Omega(t)$ ，其传播问题可以用准粒子的图象来解决。以下先引入这些原子集体激发的准粒子，也就是所谓的暗态极化子[38]，然后讨论它们的性质和应用。

考虑一个空间均匀但依赖于时间的控制场实数 Rabi 频率： $\Omega = \Omega(t) = \Omega(t)^*$ 。引入下面两个新的量子场 $\hat{\Psi}(z, t)$ 和 $\hat{\Phi}(z, t)$ ：

$$\hat{\Psi} = \cos \theta(t) \hat{\mathcal{E}}(z, t) - \sin \theta(t) \sqrt{N} \tilde{\sigma}_{bc}(z, t) e^{i\Delta kz}, \quad (3.32)$$

$$\hat{\Phi} = \sin \theta(t) \hat{\mathcal{E}}(z, t) + \cos \theta(t) \sqrt{N} \tilde{\sigma}_{bc}(z, t) e^{i\Delta kz}, \quad (3.33)$$

其中混合角 $\theta(t)$ 满足：

$$\tan^2 \theta(t) = \frac{g^2 N}{\Omega^2(t)} = n_g(t). \quad (3.34)$$

$\hat{\Psi}$ 和 $\hat{\Phi}$ 都是电磁场 ($\hat{\mathcal{E}}$) 和原子集体部分 ($\sqrt{N}\tilde{\sigma}_{bc}$) 的线性叠加, 它们的混合程度可以由混合角 $\theta(t)$ 决定, 因此可以通过改变外部场的 Rabi 频率来控制 $\hat{\Psi}$ 和 $\hat{\Phi}$ 。

对上述两个算符进行平面波分解:

$$\hat{\Psi}(z, t) = \sum_k \hat{\Psi}_k(t) e^{ikz}, \quad \hat{\Phi}(z, t) = \sum_k \hat{\Phi}_k(t) e^{ikz}, \quad (3.35)$$

分解后的模算符之间的对易关系为:

$$[\hat{\Psi}_k, \hat{\Psi}_{k'}^+] = \delta_{k,k'} \left[\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \frac{1}{N} \sum_j (\hat{\sigma}_{bb}^{(j)} - \hat{\sigma}_{cc}^{(j)}) \right], \quad (3.36)$$

$$[\hat{\Phi}_k, \hat{\Phi}_{k'}^+] = \delta_{k,k'} \left[\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \frac{1}{N} \sum_j (\hat{\sigma}_{bb}^{(j)} - \hat{\sigma}_{cc}^{(j)}) \right], \quad (3.37)$$

$$[\hat{\Psi}_k, \hat{\Phi}_{k'}^+] = \delta_{k,k'} \sin \theta \cos \theta \left[1 - \frac{1}{N} \sum_j (\hat{\sigma}_{bb}^{(j)} - \hat{\sigma}_{cc}^{(j)}) \right]. \quad (3.38)$$

在当前考虑的线性极限下, 即光子密度比原子密度小得多, $\hat{\sigma}_{bb}^{(j)} \approx 1$, $\hat{\sigma}_{cc}^{(j)} \approx 0$ 。因此, 这些新定义的场具有以下对易关系:

$$[\hat{\Psi}_k, \hat{\Psi}_{k'}^+] \approx [\hat{\Phi}_k, \hat{\Phi}_{k'}^+] \approx \delta_{k,k'}, \quad [\hat{\Psi}_k, \hat{\Phi}_{k'}^+] \approx 0, \quad (3.39)$$

这样, 就可以把它们当做玻色型的准粒子(极化子)。记系统的基态为 $|0\rangle|b_1\dots b_N\rangle$, 其中, $|0\rangle$ 是量子场的真空态, 那么将 $\hat{\Psi}_k^\dagger$ 作用在基态上可得的一系列态

$$|n_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{\Psi}_k^\dagger \right)^n |0\rangle|b_1\dots b_N\rangle, \quad (3.40)$$

立即可以证明这些态就是所谓的暗态。这些态 $|n_k\rangle$ 不包含有原子的激发态, 因此可避免自发辐射。而且, 它们是相互作用哈密顿量的本征值为 0 的本征态:

$$\hat{V}|n_k\rangle = 0. \quad (3.41)$$

为此, 把准粒子算符 $\hat{\Psi}$ 称为“暗态极化子”算符。类似地, 可以证明 $\hat{\Phi}$ 分解后的模算符作用在基态上相应于三能级系统中的亮态, 因此, $\hat{\Phi}$ 称之为“亮态极化子”。

在低密度近似下, 可以把电场和原子部分的运动方程变换为新参量的运动方程:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + c \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\Psi} = -\dot{\theta} \hat{\Phi} - \sin \theta \cos \theta c \frac{\partial}{\partial z} \hat{\Phi}, \quad (3.42)$$

$$\hat{\Phi} = \frac{\sin \theta}{g^2 N} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma \right) \left(\tan \theta \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\sin \theta \hat{\Psi} - \cos \theta \hat{\Phi} \right) + i \frac{\sin \theta}{g \sqrt{N}} F_{ba}, \quad (3.43)$$

注意，其中混合角 θ 是与时间相关的量。

引入绝热参数 $\varepsilon \equiv (g \sqrt{N} T)^{-1}$ ，其中 T 是特征时间。将运动方程按 ε 展开，在最低阶近似也就是绝热近似下有：

$$\hat{\Phi} \approx 0. \quad (3.44)$$

相应地，

$$\hat{\mathcal{E}}(z, t) = \cos \theta(t) \hat{\Psi}(z, t), \quad (3.45)$$

$$\sqrt{N} \tilde{\sigma}_{bc} = -\sin \theta(t) \hat{\Psi}(z, t) e^{-i \Delta k z}. \quad (3.46)$$

因此可以得到 $\hat{\Psi}$ 所满足的方程为：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + c \cos^2 \theta(t) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\Psi}(z, t) = 0. \quad (3.47)$$

上述方程 (3.47) 描述了一个波形和量子态保持不变的电磁场的传播，其瞬时群速度为：

$$v = v_g(t) = c \cos^2 \theta(t), \quad (3.48)$$

其解可以写为：

$$\hat{\Psi}(z, t) = \hat{\Psi} \left(z - c \int_0^t d\tau \cos^2 \theta(\tau), 0 \right). \quad (3.49)$$

对于 $\theta \rightarrow 0$ ，比如驱动场很强以致 $\Omega^2 \gg g^2 N$ 时，那么极化子具有纯光的特征：

$$\hat{\Psi} = \hat{\mathcal{E}}, \quad (3.50)$$

此时其传播的速度等于光在真空中的传播速度。在另一个相反的极限情况： $\Omega^2 \ll g^2 N$ ，那么 $\theta \rightarrow \pi/2$ ，极化子变成了一个类自旋波的形式：

$$\hat{\Psi} = -\sqrt{N} \tilde{\sigma}_{bc} e^{i \Delta k z}, \quad (3.51)$$

其传播速度趋于 0。这样，就实现了下面的映射：

$$\hat{\mathcal{E}}(z) \iff \tilde{\sigma}_{bc}(z') e^{i \Delta k z'} \quad (3.52)$$

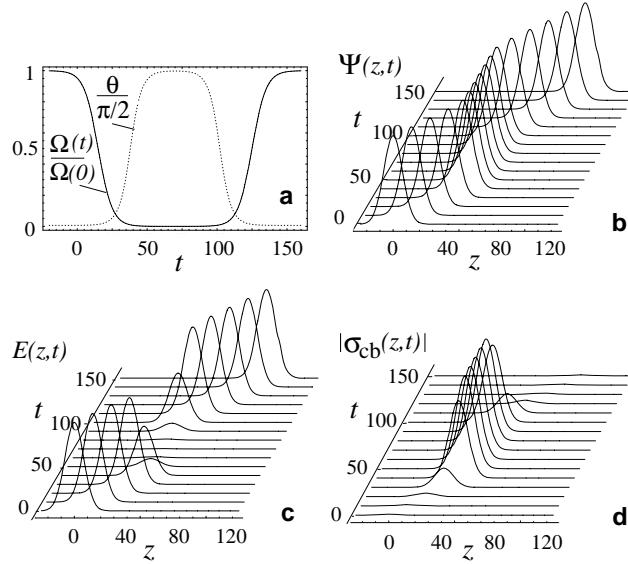


图 3.3: 包络为 $\exp\{-(z/10)^2\}$ 的暗态极化子时间演化下的传播示意图。 (a) 根据 $\cot \theta(t) = 100(1 - 0.5 \tanh[0.1(t - 15)] + 0.5 \tanh[0.1(t - 125)])$ ，混合角从 0 旋转到 $\pi/2$ ，然后再回复到 0。 (b) 极化子 $\Psi = \langle \hat{\Psi} \rangle$ 的相干振幅。 (c) 电场 $E = \langle \hat{E} \rangle$ 。 (d) 原子算符 $|\sigma_{cb}| = |\langle \hat{\sigma}_{cb} \rangle|$ 。坐标轴取归一化的任意单位 (光速 $c = 1$)。摘自文献 [39]。

其中 $z' = z + z_0 = z + \int_0^\infty d\tau c \cos^2 \theta(\tau)$ 。这就是量子态从量子光场的类型转换到原子集体激发 (稳定的自旋波) 类型的本质。绝热地旋转混合角使之从 $\theta = 0$ 变到 $\theta = \pi/2$ ，可以使得极化子“减速”到完全停下来，并从纯光场的特性转换到纯原子的特性。同样地，极化子可以重新“加速”到光的速度，此时伴随着所存贮的量子态重新转换到开始时的光场的态，见图 3.3 所示。

总之，本节介绍了基于暗态极化子的光量子存贮的基本思想，研究了暗态极化子在介质中的传播性质。在保证量子存贮的有效性的操作中所用到的关键性步骤—绝热改变经典控制光场强度—也详细说明了。

§3.3 全同玻色原子系综中的 EIT 处理

上节介绍了基于 Λ 型三能级原子系综集体激发 EIT 介质中光量子存贮的基本思想，那里所涉及的原子系综中的原子可以不是全同的。本节将介绍我们关于全同玻色型原子组成的原子系综 EIT 系统的研究工作 [98]，讨论该系统中光量子存贮问题和量子探测光场传播问题。

下面先介绍光量子的存储问题。考虑一个如图 3.4 的简单模型， N 个全同 Λ 型三能级原子置于一个单模的量子化光腔中，频率为 ν 的量子光场与原子激发态 $|a\rangle$ 和基态 $|b\rangle$ 之间跃迁共振耦合。此外一个频率为 ω 的经典光场与原子激发态 $|a\rangle$ 和亚稳态 $|c\rangle$ 共振耦合。取稳态能级能量 $E_b = \hbar\omega_b = 0$ ，系统的哈密顿量为

$$H' = \omega a^\dagger a + \omega_a \sum_{i=1}^N \sigma_{aa}^{(i)} + \omega'_c \sum_{i=1}^N \sigma_{cc}^{(i)} + g \sum_{i=1}^N a \sigma_{ab}^{(i)} + \Omega(t) e^{-i\nu t} \sum_{i=1}^N \sigma_{ac}^{(i)} + h.c.. \quad (3.53)$$

其中， ω 和 ν 分别是量子光场和经典光场的频率， g 、 $\Omega(t)$ 为相应的耦合常数（为简单起见， g 和 $\Omega(t)$ 都取实数）， ω_a 和 ω'_c 分别是原子 a 、 c 能级的能量， $\sigma_{\mu\nu}^{(i)}$ 是第 i 个原子的 μ 能级和 ν 之间的反转算符。

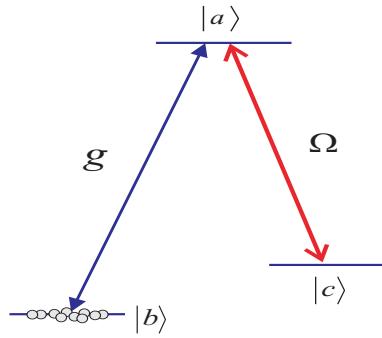


图 3.4: Λ 型三能级原子能级图，其两跃迁分别与量子探测光场（耦合系数为 g ）及经典控制光场（耦合系数为 Ω ）共振耦合。

对上述哈密顿量作一个旋转变换： $R(t) = \prod_i \exp(-i\nu t \sigma_{cc}^{(i)})$ ，则有

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_a \sum_{i=1}^N \sigma_{aa}^{(i)} + \omega_c \sum_{i=1}^N \sigma_{cc}^{(i)} + g \sum_{i=1}^N a \sigma_{ab}^{(i)} + \Omega(t) \sum_{i=1}^N \sigma_{ac}^{(i)} + h.c., \quad (3.54)$$

其中 $\omega_c = \omega'_c - \nu$ 。值得注意的是，整个原子系综是均匀的，光场对所有原子的耦合系数 g 和 $\Omega(t)$ 是一致的，此时，原子系综可以用整体对称的集体态（也就是所谓的 Dicke 态 [92]） $|N_a, N_b, N_c\rangle$ 来描述， N_a 、 N_b 和 N_c 分别为处于态 $|a\rangle$ 、 $|b\rangle$ 和 $|c\rangle$ 上的原子布居数。考虑到原子是全同的玻色粒子，因此 H 也可以按二次量子化的原则改写为

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_a A^\dagger A + \omega_c C^\dagger C + g a A^\dagger B + \Omega(t) A^\dagger C + h.c.. \quad (3.55)$$

考虑以下的简单情况：大量的原子凝聚在基态 $|b\rangle$ ，激发态和稳态上的原子数目很少，也就是满足所谓的大 N 极限和低激发条件。此时， $N_b \approx N \rightarrow \infty$ ，由 Bogoliubov 近似有

$$B = \sqrt{N}. \quad (3.56)$$

相应地，哈密顿量改为

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_a A^\dagger A + \omega_c C^\dagger C + g\sqrt{N}aA^\dagger + \Omega(t)A^\dagger C + h.c.. \quad (3.57)$$

引入两个激子极化算符

$$\varphi = a \cos \theta(t) - C \sin \theta(t), \quad (3.58)$$

$$\phi = a \sin \theta(t) + C \cos \theta(t), \quad (3.59)$$

其中，

$$\sin \theta = \frac{g\sqrt{N}}{\sqrt{g^2N + \Omega^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\Omega}{\sqrt{g^2N + \Omega^2}}, \quad (3.60)$$

φ 和 ϕ 分别称为暗态极化算符和亮态极化算符 [39]，它们满足以下对易关系：

$$\begin{aligned} [\varphi, \varphi^\dagger] &= 1, \quad [\phi, \phi^\dagger] = 1, \\ [\phi, \varphi] &= 0, \quad [\phi, \varphi^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

因此， φ 和 ϕ 是独立的玻色算符。利用上述极化算符，相互作用哈密顿量可改写为

$$H_I = \sqrt{g^2N + \Omega^2}\phi A^\dagger + h.c.. \quad (3.62)$$

从暗态极化算符 φ 出发，可以构造出所谓的暗态。记整个系统处于“真空”态： $|0, N, 0\rangle_{atom} \otimes |0\rangle_{light} \equiv |0, N, 0, 0\rangle$ ，那么暗态为

$$\begin{aligned} |D, n\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}\varphi^{\dagger n}|0, N, 0, 0\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{1}{k!(n-k)!}}(-\sin \theta)^k(\cos \theta)^{n-k}|0, N-k, k, n-k\rangle, \end{aligned} \quad (3.63)$$

它是原子系综及其耦合光场的叠加态， n 的取值可以为大于等于 0 的整数（小于原子系综中的总原子数），这意味着有一系列的暗态。

暗态是光与原子系综作用中的一个重要概念。它是相应于相互作用哈密顿量的本征值为 0 的态，因此，对于初始时处于暗态的系统，在哈密顿量作用下，由

两个低态分别向激发态跃迁的几率相等，且相位相反，这样始终保证了激发态的布居数保持 0 不变。这样，光场通过这种三能级原子介质时，尽管它与原子的某一跃迁能级共振耦合，但是由于这样相干相消现象，并不会出现象通过一般介质时那样会被共振吸收，而是会不同程度的穿透介质，也就是所谓的 EIT 现象。

由于暗态中不含有激发态，因此可以避免考虑自发辐射。在没有自发辐射的情况下，虽然不同的 $|D, n\rangle$ 是简并的（本征值为 0），但是它们分属于不同的精确解耦的系统。在绝热条件下，它们相互之间不存在跃迁。基于这种性质，暗态提供了一种很好的把单模光场的量子态传送给原子系综的办法。通过改变 g 和 $\Omega(t)$ 的比值，使混合角 θ 绝热地从 0 变换到 $\pi/2$ ，则会使一个完全的光场态的信息转换到一个集体原子系综态的信息里。也就是说，当 $\theta : 0 \rightarrow \pi/2$ 时，会有

$$|D, n\rangle : |0, N, 0, n\rangle \rightarrow |0, N - n, n, 0\rangle, \quad (3.64)$$

反之，当 θ 绝热地从 $\pi/2$ 变换到 0 时，原子集体原子系综的信息会转换到光场的信息中。如果单模光场的初始态为混合态

$$\rho_f^{light} = \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle \langle m|, \quad (3.65)$$

而原子全部凝聚在基态 $|b\rangle$ ，那么绝热变换的结果使总个系统的态有

$$\begin{aligned} \rho_f : & \sum_{n,m} \rho_{nm} |0, N, 0\rangle \langle 0, N, 0| \otimes |n\rangle \langle m| \\ & \rightarrow \sum_{n,m} \rho_{nm} |0, N - n, n\rangle \langle 0, N - m, m| \otimes |0\rangle \langle 0|, \end{aligned} \quad (3.66)$$

这样，混合单模光场的信息也能够全部转移到全同原子系综中。如果实施相反的绝热操作，同样可以使得信息从纯原子集体激发的类型转换到纯光的类型。

上面我们在全同玻色原子系综中的大 N 和低激发极限下得到了系统的暗态，并讨论了如何实现在全同玻色原子系综系统中通过绝热控制经典场强度参数来实现光量子存储。事实上，这样的绝热调节和上节中的自由原子系综中的暗态绝热操纵的研究是极其类似的。

事实上，相对于上一节中的自由原子系综系统而言，当前的系统是绝大部分原子凝聚在基态的全同玻色原子系统，因此，上述系统可以从二次量子化的角度出发简单地进行处理。在忽略了原子的空间运动的情况下，可以非常方便地求解出当前系统的暗态和所谓的暗态极化子算符，这和上一节求出的暗态和暗态极化子算符是相对应的，物理含义也是类似的。但是在当前的特殊原子系统中，其形式变得极为简单清晰。

下面研究量子探测光场在上述全同玻色原子系综 EIT 介质中的传播问题。所考虑的模型见图 3.5，由 Λ 型三能级原子系综构成准一维的沿 x 方向分布的均匀介质，一个正频部分为 $\hat{E}^{(+)}$ 的量子化电磁场与基态 $|b\rangle$ 和激发态 $|a\rangle$ 之间跃迁共振耦合，此外，激发态还通过一个 Rabi 频率为 Ω 的经典相干控制场与稳态 $|c\rangle$ 耦合起来。假定全同玻色原子系统中绝大部分原子都凝聚于内态 $|b\rangle$ 。引入三分量的场算符：

$$\psi(x, t) = \psi_a(x, t)|a\rangle + \psi_b(x, t)|b\rangle + \psi_c(x, t)|c\rangle, \quad (3.67)$$

则系统的相互作用哈密顿量可以记为

$$H_I = \int \{ (-d\psi_a^\dagger(x)\hat{E}^{(+)}(x)\psi_b(x) + h.c.) \\ + \hbar(\psi_a^\dagger(x)\Omega(x)e^{i(px-\nu t)}\psi_c(x) + h.c.) \} dx, \quad (3.68)$$

其中， x 为原子的位置， d 为 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 之间的偶极矩矩阵元， $p = \vec{k} \cdot \vec{e}_x = \frac{\nu}{c} \cos \alpha$ 是控制场的波矢 \vec{k} 在量子场的传播方向 \vec{e}_x 上的投影。假定量子场的频率 ω 以及经典控制场的频率 ν 分别和原子的跃迁频率 ω_{ab} 和 ω_{ac} 共振，原子的空间运动以及 Doppler 位移暂时都不予考虑。

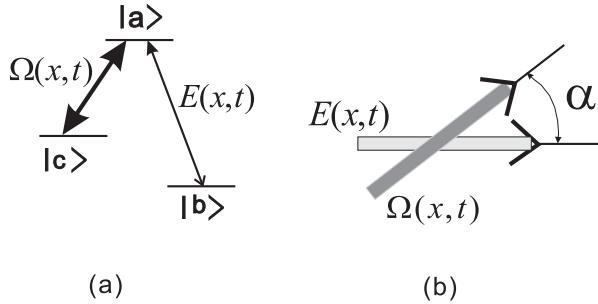


图 3.5: (a) Λ 型三能级原子能级图。 (b) 量子探测场与经典控制场成夹角 α 。

首先，引入以下慢变参量：

$$\begin{aligned} \hat{E}^{(+)}(x, t) &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} e(x, t) e^{i\omega(x-ct)/c}, \\ \psi_a^\dagger(x, t) &= \varphi_a^\dagger e^{-i(\omega_{ab}x/c - \omega_{ab}t)}, \\ \psi_c^\dagger(x, t) &= \varphi_c^\dagger e^{-i(\omega_{cb}x/c - \omega_{cb}t)}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

其中 V 为量子化体积（已选择与相互作用原子介质体积相同）， $e(x, t)$ 、 φ_a^\dagger 和 φ_c^\dagger 均为参数 x 和 t 的慢变量。另一方面，由于全同的玻色原子绝大部分原子处

于基态 $|b\rangle$ ，可以取单模近似：

$$\psi_b(x, t) = \sqrt{N}u(x), \quad (3.70)$$

其中 N 是原子数目； $u(x)$ 表征全同玻色原子介质的形状分布，可以通过求解 GP 方程求出。利用上述表达式 (3.69, 3.70)，相互作用哈密顿量变为

$$\begin{aligned} H_I = & \int \left\{ \left(-d\sqrt{\frac{N\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}\varphi_a^\dagger(x)e(x, t)u(x) + h.c. \right) \right. \\ & \left. + \hbar(\varphi_a^\dagger(x)\Omega(x)e^{iqx}\varphi_c(x) + h.c.) \right\} dx, \end{aligned} \quad (3.71)$$

或者

$$H_I = \hbar \int \left\{ \varphi_a^\dagger(x)[\sqrt{N}g(x)e(x, t) + \Omega(x)e^{iqx}\varphi_c(x)] + h.c. \right\} dx, \quad (3.72)$$

其中 $g(x) = -d\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\varepsilon_0 V}}u(x)$ 是原子与量子化光场的耦合常数，且

$$q = p - k = \frac{\omega_{ac}}{c}(\cos\alpha - 1). \quad (3.73)$$

注意到原子场算符之间的对易关系

$$[\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta^\dagger(x')] = \delta_{\alpha\beta}\delta(x - x'), \quad (3.74)$$

以及光场的对易关系

$$[E^\dagger(x, t), E(x', t)] = \delta(x - x'), \quad (3.75)$$

那么对于上述用慢变量近似表述的量子光场，其海森伯算符的时间演化方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x} \right) e(x, t) = -ig(x)\varphi_b^\dagger(x)\varphi_a(x) = -i\sqrt{N}g^2(x)\varphi_a(x). \quad (3.76)$$

场算符的海森伯方程为

$$\dot{\varphi}_a(x, t) = i\sqrt{N}g(x)e(x, t) + i\Omega e^{iqx}\varphi_c(x, t), \quad (3.77)$$

$$\dot{\varphi}_c(x, t) = i\Omega^*e^{-iqx}\varphi_a(x, t). \quad (3.78)$$

方程 (3.77) 两边对时间求导，并注意到 φ_a 是对参量 x 和 t 的慢变量，因此取其对时间的二阶偏导为 0，则有

$$\begin{aligned} 0 &= i\sqrt{N}g\dot{e} + i\Omega e^{iqx}\dot{\varphi}_c + i\dot{\Omega}e^{iqx}\varphi_c \\ &= i\sqrt{N}g\dot{e} - \Omega^2\varphi_a + i\dot{\Omega}e^{iqx}\varphi_c. \end{aligned} \quad (3.79)$$

为方便起见，耦合系数 $g(x)$ 和 $\Omega(x)$ 都取为实数。另一方面，当控制场的 Rabi 频率保持对时间缓慢变化时，有 $\dot{\Omega} = 0$ ，由此，利用方程 (3.77, 3.79)，可以得到量子光场在此介质中的传播方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial x} \right) e(x, t) = 0, \quad (3.80)$$

其中， v_g 是光场在介质中传播的群速度，

$$v_g = \frac{c}{1 + n_g}, \quad n_g = \frac{g^2 N}{\Omega^2}. \quad (3.81)$$

在 EIT 介质中， n_g 可以远远大于 1，也就是说，光场在介质中的群速度可以远远小于光速 c ，甚至可以接近于 0。近来的 EIT 原子系综介质中的实验数据也表明了这一点。

本节处理的是基于全同玻色原子系综的 EIT 系统，其中忽略了原子的空间运动和相互作用。需要指出的是，最近有些理论工作研究了基于三能级 Λ 原子的玻色爱因斯坦凝聚体中的光存贮现象 [99, 100]，在一些工作 [100] 中原子的空间运动也被考虑到了。

当前的探测光群速度的结果与上节中的结果是类似的。事实上，当前的全同玻色原子系统是一种特殊的原子系统，其物理上的处理将变得简单，但物理本质上是类似的。

§3.4 小结

本章首先阐述了为何要利用 EIT 系统来实现光量子信息的存贮。然后在第二节中简单介绍了 Fleischhauer 和 Lukin 等人关于用三能级 Λ 型原子系综集体激发的方法来存贮光量子信息的基本思想。通过引入所谓的集体激发的暗态和暗态极化子算符，他们研究了绝热演化下暗态如何实现从全光的类型到全原子集体激发类型的相互转换，由此实现了量子光的量子信息存贮。并且通过对暗态极化子的波动方程的研究，讨论了在单光子共振 EIT 三能级 Λ 型原子系综介质中暗态极化子的传播问题，从另外一个角度说明了量子光场在该原子系综中的存贮。

考虑到在第二节介绍的系统中，原子系综当作是一般概念上的可分辨原子系统。因此在第三节中，针对全同玻色原子系综的 EIT 系统，我们重新考虑了量子光场在此单光子共振 EIT 全同玻色原子系综中的传播。对量子光场的群速度的求解表明，的确可以通过绝热控制驱动场的强度来实现量子光场在原子系综中

的存贮。和先前的自由原子系综系统相比，由于当前的玻色原子系统的处理中没有考虑原子的空间运动，所以没有太多的新的物理性质的出现。但是，当前的处理有着方法上的优势，对于大部分原子处于基态的全同玻色原子系统，可以从全同原子的二次量子化方法出发，这样将极大地简化问题的处理。在一定程度上，这样的一种简化处理也启发了在本文的第五章和第六章将要介绍的我们后来关于原子系综 EIT 系统中的量子存贮的一系列理论研究。

第四章 原子系综集体激发及其量子漏损

在上一章中我们介绍了用于处理基于三能级 EIT 的原子系综问题中所引入的集体原子系综方法。利用这种方法，可以很方便的从集体系综的角度解决了量子探测光在原子介质中的传播，进而实现了量子探测光在原子系综介质中的量子信息的存贮。但是原子系综的集体激发的形成取决于每一个原子与外场耦合的一致性。此时，多原子的对称化子空间 [92] 是相互作用哈密顿量的不变子空间，从而可以作为计算空间或集体激发空间。当其耦合不一致时，原子对称化子空间不再是相互作用不变的，而是随着时间的演化，集体空间中的态矢会跑出这个空间，这个现象被称为量子漏损 (Quantum Leakage)。这种原子系综集体态的漏损现象将破坏原子系综量子信息载体的形成。本章将以二能级原子系综为例，较为详细的讨论这种非均匀耦合所带来的量子漏损。

§4.1 原子系综的集体激发

为了进一步明晰多原子系统集体激发的概念，本节将参照文献 [101, 102] 的推导，从 N 个二能级原子组成的低维多原子系统与单模量子化光场的相互作用哈密顿量出发，重新给出集体激发与单模腔场的相互作用模型。根据狄克模型 [92]，原子与光场相互作用哈密顿量可以写为 ($\hbar = 1$):

$$H = \nu a^\dagger a + \Omega \sum_{i=1}^N |e\rangle_{ii}\langle e| + g a^\dagger \sum_{i=1}^N |g\rangle_{ii}\langle e| + h.c., \quad (4.1)$$

其中， Ω 为原子跃迁频率，原子基态用 $|g\rangle$ 、激发态用 $|e\rangle$ 标记。假定所有原子与光场的耦合强度相同，并用耦合常数 g 来标记。 $a(a^\dagger)$ 标记单模光场的湮灭 (产生) 算符。因为每一个二能级原子都可以视为一个角动量 $1/2$ 的系统，于是可以引入总角动量算符

$$J_- = \sum_{i=1}^N \sigma_-^{(i)}, \quad J_+ = (J_-)^\dagger = \sum_{i=1}^N \sigma_+^{(i)}, \quad J_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_z^{(i)}, \quad (4.2)$$

其中， $\sigma_-^{(i)} = (\sigma_+^{(i)})^\dagger = |g\rangle_{ii}\langle e|$ ， $\sigma_z^{(i)} = |e\rangle_{ii}\langle e| - |g\rangle_{ii}\langle g|$ 。角动量算符 J 构成 $SU(2)$ 代数，满足如下对易关系

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_z, \quad [J^2, J_\pm] = 0. \quad (4.3)$$

于是哈密顿量可以用角动量算符表示为

$$H = \Omega J_z + \nu a^\dagger a + g a^\dagger J_- + h.c.. \quad (4.4)$$

体系总角动量平方 J^2 是一个守恒量。在整个系统演化过程中 J^2 的本征值 $j(j+1)$ 保持不变，其中 $j = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, 0$ 。 j 的取值完全由原子系统的初态决定。原子系统的能量最低态为 $|j = \frac{N}{2}, m = -\frac{N}{2}\rangle$ ，对应于所有的原子都处在基态的情况。这个态与固体物理中的费米面填满的真空态相类比，原子系统中的集体激发对应于激子（电子-空穴对）产生的过程 [103]。于是可以引入原子集体激发算符

$$B^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} J_+, \quad B = \frac{1}{\sqrt{N}} J_- \quad (4.5)$$

来描述多原子系统的集体激发问题。算符 B 满足的对易关系为

$$[B, B^\dagger] = -\frac{2}{N} J_z. \quad (4.6)$$

根据角动量理论有

$$J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1), \quad (4.7)$$

$$J_+ J_- = J_x^2 + J_y^2 + J_z = \frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1) - J_z^2 + J_z, \quad (4.8)$$

可以得到

$$J_z = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{(N+1)^2 - 4J_+ J_-}). \quad (4.9)$$

取其中的一个根 $J_z = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{(N+1)^2 - 4J_+ J_-}]$ 。于是集体激发算符满足的对易关系可以重新写为

$$[B, B^\dagger] = \sqrt{(1+\eta)^2 - 4\eta B^\dagger B} - \eta, \quad (4.10)$$

其中 $\eta = \frac{1}{N}$ 。当原子数目 N 很大，即 η 很小时，展开上式并保留到 η 的一阶项。算符 B 满足的对易关系可以近似地写为

$$[B, B^\dagger] = 1 - 2\eta B^\dagger B, \quad (4.11)$$

或者写为

$$[B, B^\dagger]_q \equiv BB^\dagger - qB^\dagger B = 1, \quad (4.12)$$

其中 $q = 1 - 2\eta$ 。可以看出集体激发的激子算符满足 q 变形的玻色对易关系 [104, 105]。另一方面，根据 (4.2) 式的定义，得到

$$J_z = \sum_{i=1}^N |e\rangle_{ii}\langle e| - \frac{N}{2}, \quad (4.13)$$

$$J_z^2 = \left(\sum_{i=1}^N |e\rangle_{ii}\langle e| \right)^2 - N \sum_{i=1}^N |e\rangle_{ii}\langle e| + \left(\frac{N}{2} \right)^2. \quad (4.14)$$

于是,

$$\begin{aligned} B^\dagger B &= \frac{1}{N} \left[\frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) - J_z^2 + J_z \right] \\ &= \sum_{i=1}^N |e\rangle_{ii}\langle e| + \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N |e\rangle_{ii}\langle e| - \left(\sum_{i=1}^N |e\rangle_{ii}\langle e| \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

考虑 $N \rightarrow \infty$ 极限, 即 $\eta \rightarrow 0$, 并且处于激发态的原子密度很小的情况, 那么此时激子算符满足标准的玻色对易关系。但是对于激发态原子密度较大, 且 N 有限的情况 (η 是小量), 激子算符不满足玻色对易关系, 而是满足 q 变形的玻色对易关系。此时激子系统和单模光场的相互作用可以近似地用有效哈密顿量

$$H = \Omega B^\dagger B + \nu a^\dagger a + G a^\dagger B + h.c. \quad (4.16)$$

来表述。其中 $G = \sqrt{N}g$ 为激子一光场的耦合强度, 这里假定为实的。

进一步将 q 变形的激子算符 B 按标准的玻色算符 \hat{b} 展开, 保留到 η 的一阶项。代入到 (4.11) 或者 (4.12) 式中, 比较同次系数, 我们得到

$$B^\dagger = b^\dagger - \frac{b^\dagger b^\dagger b}{2N}, \quad B = b - \frac{b^\dagger b b}{2N}. \quad (4.17)$$

代入到 (4.16) 式中, 得到高密度激子与单模光场相互作用哈密顿量 [106]

$$H = H_0 + H', \quad (4.18)$$

其中,

$$H_0 = \Omega b^\dagger b + \nu a^\dagger a + G a^\dagger b + h.c., \quad (4.19)$$

$$H' = -\frac{1}{2N} (2\Omega b^\dagger b^\dagger b b + G a^\dagger b^\dagger b b + G a b^\dagger b^\dagger b), \quad (4.20)$$

其中, H' 中第一项代表激子一激子相互作用, 最后两项描述相空间填充效应 (Phase-space filling effect) [107]。

通过上面的讨论我们可以看出, 在 $N \rightarrow \infty$ 极限和低激发条件下, 激子算符满足玻色对易关系。激子与单模光场的相互作用由哈密顿量 (4.19) 描述。在本论文以后的讨论中, 基本都是基于大 N 极限和低激发的条件, 这样, 所定义的集体激发算符都满足简单的玻色对易关系而不是 q 变形的对易关系, 所以在我们所考虑的问题中, 其计算都将变得比较简洁。

§4.2 集体激发的量子漏损

在过去几年里，使用对称化的原子系综内态的集体激发来处理原子与光场相互作用引起了一些研究工作者的重视 [38, 39]。Fleischhauer 等人也讨论过原子集体激发方法的好处和坏处 [39]。利用原子系综方法的一个例子是腔量子电动力学。在基于量子电动力学腔的量子计算应用中，原子量子位之间的纠缠和逻辑操作都是通过与腔中的光量子场相互作用来完成的。为了维持系统的量子相干性，一般需要满足所谓的强耦合条件 [108]。也就是说，单光子的相干耦合系数 g_0 要远大于原子的耗散率 γ 和腔的耗散率 κ 。这就使得需要使用高精细的光量子腔。因此，一般情况下上述强耦合条件是比较难以实现的。如果通过将总数为 N 的一大堆原子放置腔中，可以使得原子系综的对称化集体态与腔的耦合系数有 \sqrt{N} 倍的增强，这样就能够比较容易地实现强耦合条件，从而避免使用高精度的腔的困难。事实上，在早期处理自由原子的超辐射 [75] 与超荧光 [76] 等现象的研究中，就利用了这样一种原子集体态的动力学性质。近来实验上的一些成功也很清楚地表明基于原子系综系统对于处理宏观物体的纠缠问题也具有强大的生命力 [109, 110]。

注意到处理对称化的原子系综内态集体激发问题时，所涉及的原子系统计算空间是一个约化的希尔伯特空间。对于 N 个二能级原子构成的系综，其总空间 \mathcal{V}^T 的维数为 2^N 维。而对称化的原子系综内态所构成的计算空间 \mathcal{V}^S 的维数为 $N+1$ 维，远远小于总空间的维数。因此，处理原子系综集体态的计算空间只是实际的原子态总空间的一个子空间。当每个原子与外场的耦合一致时，若原子初态处于该对称化的子空间 \mathcal{V}^S 内，那么在以后的演化和操纵中原子系综将仍处于该对称化的子空间内，而不会逃逸到对称化子空间以外的空间去。已有的实验和理论上的处理基本上都是基于这样一种原子与外场的均匀耦合的假设。

针对当外场与原子系综耦合不均匀时的情况，孙昌璞 (C.P.Sun)、易俗 (S.Yi) 和尤力 (L.You) 等人 [111] 研究了此时原子对称化内态叠加态的退相干问题。考虑到仅仅当所有原子能够被协同地操纵时，原子系综的对称化子空间才有效。或者说，外场、环境与原子的耦合都必须是均匀的时候才可以通过原子系综集体算符来描述系综的集体运动。然而实际上无论是经典光场还是量子光场，在穿过原子系综介质时，其与原子的耦合一般都是非均匀的，一般来说，耦合强度是依赖于原子位置的。那么自然而然地，对于初态为对称化子空间上叠加态的系统，其原子部分将会出现量子退相干。该文 [111] 把这种退相干归因为非均匀退相干，并引入了一个非均匀耦合模型详细地讨论了非均匀耦合所带来的退相干影响。

下面介绍文献 [111] 的基本思想和详细推导。所考虑的模型为由 N 个二能级原子组成的系综与单模经典光场相互作用的系统。总的哈密顿量为:

$$H = \sum_{k=1}^N \left[\frac{1}{2} \omega_a^{(k)} \sigma_z^{(k)} + \frac{1}{2} (g_0^{(k)} \sigma_+^{(k)} + h.c.) \right], \quad (4.21)$$

其中 $\sigma_{\pm} = \sigma_x \pm i\sigma_y$ ，而 $\sigma_{z,y,z}$ 是标准的泡利矩阵 ($\hbar = 1$)； $g_0^{(k)}$ 是第 k 个原子与经典光场的耦合系数； $\omega_a^{(k)} = \varepsilon_a^{(k)} - \omega_L$ 是第 k 个原子的跃迁能级 $\varepsilon_a^{(k)}$ 与光场频率 ω_L 的差。为方便起见，可以进一步将 (4.21) 式写为紧凑的形式:

$$H = \sum_{k=1}^N \vec{B}^{(k)} \cdot \vec{\sigma}^{(k)}, \quad (4.22)$$

其中 $\vec{B}^{(k)} = (B_x^{(k)}, B_y^{(k)}, B_z^{(k)})$ ，分量 $B_{\mu}^{(k)}$ 为实参量 ($\mu = x, y, z$)。上述哈密顿量表述了最广泛的一种使用经典控制场操作集体自旋量子态的形式。

上面提到的子空间，也就是对称化的集体自旋空间 \mathcal{V}^S ，其维数为 $2J+1=N+1$ ，它是由集体的角动量态 $\{|J, M\rangle, M = -J, \dots, J-1, J\}$ 所张成的。总自旋角动量 \hat{J} 的三个分量为: $J_{\mu} = \sum_{i=1}^N \sigma_{\mu}^{(i)}/2$, $\mu = x, y, z$ ，它们满足以下关系:

$$[J_{\mu}, J_{\nu}] = i\epsilon_{\mu\nu\zeta} J_{\zeta}, \quad (\mu, \nu, \zeta = x, y, z); \quad (4.23)$$

$$J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \hat{J}^2 = J(J+1), \quad (4.24)$$

其中 $\epsilon_{\mu\nu\zeta}$ 是对称置换张量。实际上，上述集体自旋空间的态矢 $\{|J, M\rangle, M = -J, \dots, J-1, J\}$ 可以由阶梯算符 $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ 作用在角动量基态 $|J, -J\rangle$ 上来生成:

$$|J, M\rangle = \sqrt{\frac{(J-M)!}{(J+M)!(2J)!}} J_+^{J+M} |J, -J\rangle. \quad (4.25)$$

对于任何实际的物理系统，系统参量 $\vec{B}^{(j)}$ 的不均匀分布将不可能使得系统的动力学演化一直限制在子空间 \mathcal{V}^S 中。为方便以下的讨论，可将总的哈密顿量分解为:

$$H = H_0 + H_1, \quad (4.26)$$

$$H_0 = \sum_{k=1}^N \vec{B} \cdot \vec{\sigma}^{(k)}, \quad H_1 = \sum_{k=1}^N \vec{b}^{(k)} \cdot \vec{\sigma}^{(k)}, \quad (4.27)$$

其中 $\vec{B}^{(k)} = \vec{B} + \vec{b}^{(k)}$ ， $\vec{B} = \sum_k \vec{B}^{(k)}/N$ 。这样的分解使得 H_0 只包含有对称的集体自旋部分，而 H_1 表征系统非均匀耦合部分。 H_1 是系统非均匀耦合所引

发的退相干的根源，它提供直接的从对称化子空间到子空间在总空间 \mathcal{V}^T 的互补空间 \mathcal{V}^O 上的耦合。根据系统的非均匀漏损参数可以定量的计算出 H_1 所带来的这种退相干的影响。假定系统初始时刻制备在一个处于子空间 \mathcal{V}^S 中的叠加态 $|\phi(0)\rangle$ ，那么在人们期待的理想动力学演化下其演化算符为：

$$U_0(t) = e^{-itH_0} = \prod_{k=1}^N e^{-it\vec{B}\cdot\sigma^{(k)}}, \quad (4.28)$$

使得在以后的演化中系统的态 $|\phi_0(t)\rangle = U_0(t)|\phi(0)\rangle$ 仍然处于对称化的子空间中。然而，实际的演化中系统的态将为 $|\phi(t)\rangle = U(t)|\phi(0)\rangle$ ，其中

$$U(t) = \prod_{k=1}^N e^{-it\vec{B}^{(k)}\cdot\sigma^{(k)}}, \quad (4.29)$$

这个态将超出子空间 \mathcal{V}^S 。因此可以定义所谓的“漏损”(Leakage)：

$$\xi = 1 - |\langle\phi_0(t)|\phi(t)\rangle|^2. \quad (4.30)$$

$\xi = 0$ 意味着没有漏损，系统经受均匀的耦合而将仍然处在对称化子空间中； $\xi = 1$ 意味着漏损最大，系统的相干性完全破坏了。

下面给出具体的分析和数值计算来讨论漏损。假定初态 $|\phi(0)\rangle \in \mathcal{V}^S$ 是一个由 $|J, M\rangle$ 展开的叠加态：

$$|\phi(0)\rangle = \sum_{M \ll N, \text{or } M \sim N} c_M |J, M\rangle, \quad (4.31)$$

上式中关键是交叠部分的计算：

$$\begin{aligned} |\langle\phi_0(t)|\phi(t)\rangle|^2 &= |\langle\phi(0)|U_0^\dagger(t)U(t)|\phi(0)\rangle|^2 \\ &= \sum_M \sum_{M'} c_{M'}^* c_M O_{M'M}(t) \leq 1, \end{aligned} \quad (4.32)$$

其中

$$\begin{aligned} O_{M'M}(t) &\equiv \langle J, M' | U_0^\dagger(t) U(t) | J, M \rangle \\ &= \langle J, M' | \prod_{k=1}^N O^{(k)} | J, M \rangle, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$O^{(k)} = R^{(k)} + i\vec{I}^{(k)} \cdot \vec{\sigma}^{(k)}, \quad (4.34)$$

$$R^{(k)} = \cos Bt \cos B^{(k)} t + (\hat{n} \cdot \hat{n}^{(k)}) \sin Bt \sin B^{(k)} t, \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \vec{I}^{(k)} &= \hat{n} \sin Bt \cos B^{(k)} t + \hat{n}^{(k)} \cos Bt \sin B^{(k)} t \\ &\quad + (\hat{n} \times \hat{n}^{(k)}) \sin Bt \sin B^{(k)} t. \end{aligned} \quad (4.36)$$

公式中定义了 $\hat{n} = \vec{B}/B$ 和 $\hat{n}^{(k)} = \vec{B}^{(k)}/B^{(k)}$ 。

由于态 $|J, M\rangle$ 涉及到所有 N 个原子的对称置换, Π_k 部分不能被提出到内积之外, 因此公式 (4.33) 是很难计算的。联想到处理量子测量中退相干模型中的一个类似的直积结构 [112], 在那里退相干因子 (探测器或者环境末态的交叠部分) 表示了它的约化密度矩阵的非对角元。对于一个可因子化的态 $|f\rangle = \prod_{k=1}^N |f^{(k)}\rangle$, 交叠积分 $\langle f | \prod_{k=1}^N W_{M'M}^{(k)} | f \rangle$ 将化解为 $\prod_{k=1}^N \langle f^{(k)} | W_{M'M}^{(k)} | f^{(k)} \rangle$, 因为每个因子化部分 $\langle f^{(k)} | W_{M'M}^{(k)} | f^{(k)} \rangle$ 的值都小于 1, 因此当 N 趋近宏观极限时上述交叠积分趋近于 0。对于当前的问题, 为了能够进行类似的讨论, 需要找到一个表述, 以至于集体态 $|J, M\rangle$ 是因子化的。

根据早期的关于原子相干态 [113, 114] 的讨论, 考虑引入位相相干态 (phase coherent state)

$$|\theta\rangle = \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{e^{i\theta}}{2} \sigma_+^{(k)} \right) |\downarrow\rangle = \frac{1}{2^{N/2}} e^{J_+ e^{i\theta}} |J, -J\rangle, \quad (4.37)$$

它可以根据不同的激发数展开为

$$\begin{aligned} |\theta\rangle &= \frac{1}{2^{N/2}} \left[1 + e^{i\theta} J_+ + \cdots + \frac{e^{in\theta}}{n!} J_+^n + \cdots \right] |J, -J\rangle \\ &= \sum_{M=-J}^J \frac{e^{i(J+M)\theta}}{\mathcal{N}_{JM}} |J, M\rangle, \end{aligned} \quad (4.38)$$

其中 $\mathcal{N}_{JM} = \sqrt{(J+M)!(J-M)!2^N/(2J)!}$, 其逆变换为

$$|J, M\rangle = \frac{\mathcal{N}_{JM}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(J+M)\theta} |\theta\rangle d\theta. \quad (4.39)$$

利用上述变换, 可以将 (4.33) 式写为 $O_{M'M} = \mathcal{N}_{JM} \mathcal{N}_{J'M'} o_{M'M}$ 。其中约化的交叠项 $o_{M'M}$ 可以用写为简单的因子化形式

$$o_{M'M} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\theta' e^{-i(J+M)\theta} e^{i(J+M')\theta'} \prod_{k=1}^N G^{(k)}(\theta, \theta'), \quad (4.40)$$

其中

$$G^{(k)} = \frac{1}{2} {}_k \langle \downarrow | \left(1 + e^{-i\theta'} \frac{\sigma_-^{(k)}}{2} \right) O^{(k)} \left(1 + e^{i\theta} \frac{\sigma_+^{(k)}}{2} \right) | \downarrow \rangle_k. \quad (4.41)$$

当 $(1 + e^{i\theta} \frac{\sigma_+^{(k)}}{2}) | \downarrow \rangle_k / \sqrt{2}$ 已经归一化时, $|G^{(k)}| \leq 1$ 。

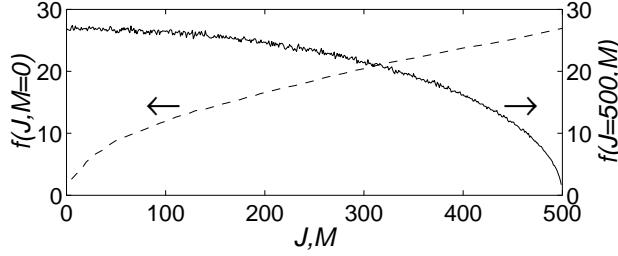


图 4.1: f 与 $M(J = 500)$ 及 f 与 $J(M = 0)$ 的关系, 其中 $B_z = 1$ 。摘自文献 [111]。

以下从几个方面来详细讨论上述问题。首先, 考察以下一种非均匀分布的情况: $B_x^{(k)} = B_y^{(k)} = 0$, $B_z^{(k)}$ 满足一个方差为 Δ_z^2 、平均值为 $\vec{B} = B_z \hat{z} = \langle B_z^{(k)} \rangle \hat{z}$ 的正态分布。那么有 $O_{MM'}(t) \propto \delta_{MM'}$, 当 $|M| = J$ 时其比例系数为常数 1, 当 $|M| < J$ 时, 比例系数以 $T_{1/2} \propto 1/(\sqrt{N}\Delta_z)$ 指数衰减。定义 $T_{1/2} \equiv 1/(f\Delta_z)$, 那么当 $\Delta_z \in [10^{-7}, 10^{-1}]B_z$ 时, f 本质上是独立于 Δ_z 的。当给定 J 和 B_z 的值时, 从图 4.1 中可以看出 f 依赖于 $J^2 - M^2$ 。 f 对于 J 的依赖关系 (当 $M = 0$) 也可以从图 4.1 中看出。进一步的数值计算的结果表明 $T_{1/2}(J, M, \sigma_z)$ 可以表达为一个高精度的表达式:

$$T_{1/2}(J, M, \Delta_z) = \frac{1}{\kappa \Delta_z \sqrt{J} \sqrt{1 - M^2/J^2}}, \quad (4.42)$$

其中 $\kappa \approx 1.2$, 当 $B_z \in [10^{-2}, 10^2]$ 时 κ 基本不依赖于 B_z 。

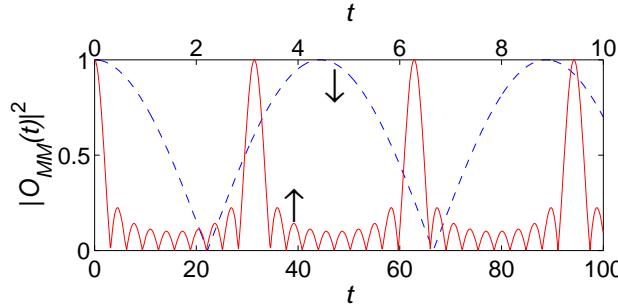


图 4.2: $|O_{MM}(t)|^2$ 的周期行为。实线表示 $M = 4$ 和 $N = 10$, 对应于短时间轴; 虚线表示 $M = 1$ 和 $N = 2$, 对应于长时间轴。(为了保证复苏的出现, 对于 $N = 10$ 时, $B_z^{(k)} = k$; 对于 $N = 2$ 时, $B_z^{(k)}$ 取任意随机值时复苏现象都会发生。摘自文献 [111]。)

根据量子波包的塌缩和复苏研究 [115], 上述结果是合理的。因为每个原子塌缩的时间正比于 $1/\Delta_z$, 那么一个高斯系综集体态塌缩的时间 $\propto 1/(\sqrt{N}\Delta_z)$ 。

事实上，当 $M = 0$ 或者 $|M| \ll J$ 时的数值结果也同样表明了这一点。式 (4.42) 也说明了当 $|M| \sim J$ 时（此区域中集体自旋态最为适用），约化退相干会显著地产生。实际上对于简单的涉及到两个态 ($M = -J$ 和 $-J + 1$) 叠加的一个量子位的存储，其退相干率正是单原子的退相干率 [39]。对于 N 值很小的系统，从图 4.2 中能够看到期待中的复苏。当然，当原子数 N 为宏观极限的系统，这种复苏显然不会看到。

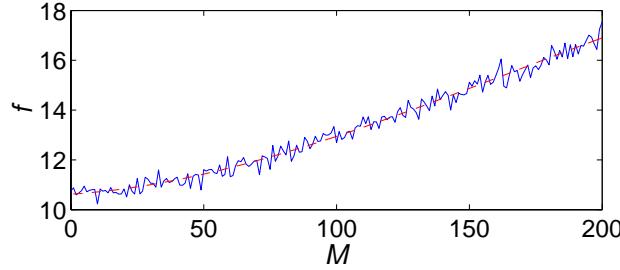


图 4.3: $J = 200$ 、 $B_r = 10$ 时， f 对 M 的函数关系。光滑的曲线对应表达式： $-4.06483 \times 10^{-7}|M|^3 + 2.03393^{-4}M^2 + 0.00697|M| + 10.62188$ 。摘自文献 [111]。

下面考虑另外一种 Rabi 耦合系数非均匀的情况： $B_z^{(k)} = 0$ ， $B_{x/y}^{(k)}$ 为高斯分布，平均值为 $B_x = B_y = B_r$ ，方差为 $\Delta_x^2 = \Delta_y^2 = \Delta_r^2$ 。与先前的情况类似，对角元 $O_{MM}(t)$ （包括 $M = \pm J$ ）将以恒定的时间 $T_{1/2} = 1/f\sigma_r$ 衰减。 $T_{1/2}$ 对 J 的依赖几乎是等同的，例如： $f_{M=0} = \kappa_1 J^{1/2}$ （取 $B_r = 10$ 时 $\kappa_1 \approx 0.76$ ）。另一方面， $T_{1/2}$ 对 J 的依赖却非常复杂，见图 4.3。显然， f 并不线性依赖于 M ，因为此时 $|O_{MM}(t)|$ 似乎对于更大的 $|M|$ 衰减得更快。

总之，在所给出的模型中， N 个原子集体自旋叠加态的退相干率（或耗散率）与 \sqrt{N} 成比例。这一点清楚地说明了在量子信息过程中使用集体自旋态似乎并不具有更好的优越性。因为当非均匀耦合产生时，耦合系数 \sqrt{N} 倍增强所带来的好处被退相干率相应的 \sqrt{N} 倍的增强所抵消了！

最后需要指出的是，上述结果也适用于两个不同系综集体自旋态的纠缠态的情况。例如：对于两个原子系综 A 和 B ，其集体态

$$|\Psi\rangle = \sum_{M_A, M_B} c_{M_A, M_B} |J_A, M_A\rangle_A \otimes |J_B, M_B\rangle_B \quad (4.43)$$

仍然能够表述成总自旋基矢 $|J_A, J_B; J, M = M_A + M_B\rangle$ 的叠加态，其中 $J = J_A + J_B = (N_A + N_B)/2$ 是总自旋。这样，两个不同的系综也可以用类似地使用集体自旋态来处理。

§4.3 质心运动诱导的量子漏损

上一节的研究表明，原子系综集体激发的形成取决于每一个原子与外场耦合的一致性。本节将研究影响原子系综量子比特形成的另外一类因素：原子质心的无规则运动对原子系综集态存在的影响，事实上，这种影响本质也可以归结为耦合的非均匀性，只是这种非均匀性主要体现在复耦合系数的位相上。这里具有复耦合系数的非均匀性导致量子集体空间漏损问题在上一节的工作中未有涉及。正是在这样的一般前提下，我们研究了此时原子系综量子载体的漏损问题。本节将详细介绍我们关于这个问题的讨论 [116]。

首先不失一般性，考虑由 N 个二能级原子（质量取为 1）组成的原子系综。用 Pauli 矩阵 $\sigma_{\alpha}^{(k)}$ ($\alpha = z, \pm$) 表征其中第 k 个原子的准自旋。为简单起见，仅考虑它们作为一个整体与频率为 ω_L 的经典单模光场与原子系综相互作用。在旋转波近似下，可以写出有效哈密顿量

$$H_{ori} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} p_k^2 + \frac{1}{2} g^{(k)}(x_k) \sigma_+^{(k)} + h.c + \frac{1}{2} \omega^{(k)} \sigma_z^{(k)} \right), \quad (4.44)$$

其中， p_k 为第 k 个原子的质心动量， $g^{(k)}(x_k)$ 是由光场模式决定的依赖于空间位置 x_k 的有效耦合系数， $\omega^{(k)} = \epsilon^{(k)} - \omega_L$ ，其中 $\epsilon^{(k)}$ 是第 k 个原子的内部跃迁能级。一般关于原子系综量子存贮的讨论，都假设了系统是均匀的，即所有的耦合系数以及原子能级都是一致的： $g^{(k)} \equiv g$ ， $\omega^{(k)} \equiv \omega$ ，且 g 不依赖于空间位置 x_k 。为简单起见， g 取为实数。在这种情况下， $S_{\pm} = \sum_{k=1}^N \sigma_{\pm}^{(k)}$ 和 $S_z = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sigma_z^{(k)}$ 均整体地出现于哈密顿量中，即：

$$H_c = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} p_k^2 + g S_+ + g S_- + \omega S_z. \quad (4.45)$$

因此，由全部准自旋向下的状态

$$|J, -J\rangle = |\downarrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\downarrow\rangle_N \quad (J = N/2) \quad (4.46)$$

出发，在 S_+ 作用下生成的对称子空间 V_c ：

$$\{|J, M\rangle \sim (S_+)^{J+M} |J, -J\rangle \mid M = -J, \dots, J\}, \quad (4.47)$$

这是 H_c 的不变子空间。特别是在大 N 极限下，集体激发算子

$$b^\dagger = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{S_-}{\sqrt{2J+1}} \quad (4.48)$$

满足波色子对易关系 $[b, b^\dagger] = 1$ 。因此通过集体正则变量 $Q \propto b + b^\dagger$ 和 $P \propto b - b^\dagger$ 定义的 EPR(Einstein-Podolsky-Rosen) 态，可以进行量子隐形传态 (Quantum Teleportation)[19, 30] 演示实验。由此实现的量子态被称为原子系综集体量子“比特”。

本章上节中研究的是耦合系数 g_k 不直接依赖于位置 x_k 、但 $g_j \neq g_k$ 的非均匀常数的情况。在这种非均匀耦合情况下，虽然空间部分与内态部分可以分离变量，但 V_c 不再是 H_c 的不变子空间，从而对于给定的初态 $|\phi(0)\rangle$ ，可以定义集体态的量子漏损

$$L(t) = 1 - |\langle\phi(0)|U_c^\dagger(t)U(t)|\phi(0)\rangle|^2, \quad (4.49)$$

其中， $U(t)$ 是非均匀哈密顿量 (4.44) 支配的演化矩阵， $U_c(t)$ 是集体哈密顿量 (4.45) 支配的演化矩阵。很显然，当体系耦合均匀时， $L = 0$ ，没有集体态的漏损，这个定义与文献 [117] 相一致。对于目前研究的一般情况，要考虑到有限温度的影响。针对由密度矩阵 $\rho(0)$ 描述的初态，把量子漏损的定义推广为

$$L(t) = 1 - |F(t)|^2, \quad (4.50)$$

其中，

$$F(t) = Tr(U(t)\rho(0)U_c^\dagger(t)) \quad (4.51)$$

称为集体保真度 (Fidelity)。很明显，当系统均匀时，集体保真度为 1。

利用这个推广的量子漏损的定义，下面来讨论 g_k 直接依赖于位置 x_k 的原子空间诱导退相干影响。考虑上述一般模型 (4.44) 的一个实际例子—行波光场中的原子系综。此时，取 $g_k(x_k) = ge^{-iqx_k}$ 。为简单计，同时假设仅有均匀的 Zeemann 分裂即 $\omega^{(k)} \equiv \omega = const.$

为了求解这个模型，首先引入与时间无关的幺正变换

$$W = \prod_{k=1}^N \exp\left[-\frac{i}{2}qx_k\sigma_z^{(k)}\right], \quad (4.52)$$

则原来的哈密顿量变为

$$H = W^\dagger H_{ori} W = \sum_{k=1}^N H^{(k)}, \quad (4.53)$$

其中，

$$H^{(k)} = \frac{1}{2}p_k^2 + \frac{q^2}{8} + \frac{1}{2}(\omega - qp_k)\sigma_z^{(k)} + \left(\frac{1}{2}g\sigma_+^{(k)} + h.c.\right). \quad (4.54)$$

由于 $H^{(k)}$ 中的动量算符 p_k 与自旋部分是可对易的，因此可以直接写下因子化形式的演化算子

$$U(t) = \prod_{k=1}^N \exp\left[-\frac{i}{2}qx_k\sigma_z^{(k)}\right] U^{(k)}(t) \exp\left[\frac{i}{2}qx_k\sigma_z^{(k)}\right], \quad (4.55)$$

其中，

$$U^{(k)}(t) = \exp(-itH^{(k)}). \quad (4.56)$$

现在考虑系综中所有原子质心处于热平衡态上：

$$\rho_S = \prod_{k=1}^N \rho_S^{(k)} = \prod_{k=1}^N \int P_k(\beta, p_k) |p_k\rangle\langle p_k| dp_k, \quad (4.57)$$

其中，

$$P_k(\beta, p_k) = \frac{1}{z_k} \exp\left[-\beta \frac{1}{2} p_k^2\right], \quad z_k = \sqrt{2\pi/\beta}, \quad (4.58)$$

$\beta = 1/k_b T$ (k_b 是 Boltzmann 常数， T 是原子系综的温度)。注意到多原子初态和哈密顿量均为因子化的。为了使得量子漏损计算能较快地收敛，我们需要引入 N 原子准自旋相干态的概念。对于给定原子数 $N = 2J$ ，计算空间的集体角动量态为

$$|J, M\rangle = \frac{S_+^{J+M}}{\sqrt{(J+M)!(J-M)!}} |J, -J\rangle. \quad (4.59)$$

根据上节引入的原子相干态 [92, 111]，上式可以写为原子相干态

$$|\theta\rangle = \prod_{k=1}^{2J} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{1}{2}e^{i\theta}\sigma_+^{(k)}\right) |\downarrow\rangle \quad (4.60)$$

的积分，即

$$|J, M\rangle = n(J, M) \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i(J+M)\theta} |\theta\rangle, \quad (4.61)$$

其中

$$n(J, M) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(J+M)!(J-M)!2^N}{(2J)!}}. \quad (4.62)$$

假设初始时刻时，原子系综处于集体态 $|J, M\rangle$ 上，则总体初态的密度矩阵

$$\begin{aligned} \rho(0) &= |J, M\rangle\langle J, M| \otimes \rho_S \\ &= [n(J, M)]^2 \int d\theta e^{-i(J+M)\theta} \int d\theta' e^{i(J+M)\theta'} \\ &\quad \cdot \prod_{k=1}^N \int P_k(\beta, p_k) |p_k, e_k(\theta)\rangle\langle e_k(\theta'), p_k| dp_k \end{aligned} \quad (4.63)$$

是因子化的。于是有

$$\begin{aligned} F(t) &= [n(J, M)]^2 \int d\theta e^{-i(J+M)\theta} \int d\theta' e^{i(J+M)\theta'} \prod_{k=1}^N \int P_k(\beta, p_k) dp_k \\ &\quad \langle e_k(\theta'), p_k | U_0^{(k)\dagger} e^{-\frac{i}{2}qx_k\sigma_z^{(k)}} U^{(k)} e^{\frac{i}{2}qx_k\sigma_z^{(k)}} | p_k, e_k(\theta) \rangle, \end{aligned} \quad (4.64)$$

其中

$$\begin{aligned} &\langle e_k(\theta'), p_k | U_0^{(k)\dagger} e^{-\frac{i}{2}qx_k\sigma_z^{(k)}} U^{(k)} e^{\frac{i}{2}qx_k\sigma_z^{(k)}} | p_k, e_k(\theta) \rangle \\ &= \left\{ \frac{1}{2} e^{-itqp_k/2} e^{i\theta} (\cos n^{(k)} t - i \sin n^{(k)} t \cos \alpha^{(k)}) \right. \\ &\quad [i \sin n_0^{(k)} t \sin \alpha_0^{(k)} + (\cos n_0^{(k)} t + i \sin n_0^{(k)} t \cos \alpha_0^{(k)}) e^{-i\theta'}] \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{itqp_k/2} (\cos n'^{(k)} t + i \sin n'^{(k)} t \cos \alpha'^{(k)}) \\ &\quad [\cos n_0^{(k)} t - i \sin n_0^{(k)} t \cos \alpha_0^{(k)} + i \sin n_0^{(k)} t \sin \alpha_0^{(k)} e^{-i\theta'}] \} \langle p_k | p_k \rangle \\ &= \varphi(\theta, \theta', t) \langle p_k | p_k \rangle, \end{aligned} \quad (4.65)$$

且

$$\begin{aligned} n^{(k)} &= \sqrt{g^2 + \frac{1}{4} \left[\omega - q(p_k + \frac{q}{2}) \right]^2}, \quad \alpha^{(k)} = \arctan \frac{2g}{\omega - q(p_k + \frac{q}{2})} \\ n'^{(k)} &= \sqrt{g^2 + \frac{1}{4} \left[\omega - q(p_k - \frac{q}{2}) \right]^2}, \quad \alpha'^{(k)} = \arctan \frac{2g}{\omega - q(p_k - \frac{q}{2})} \\ n_0^{(k)} &= \sqrt{g^2 + \frac{\omega^2}{4}}, \quad \alpha_0^{(k)} = \arctan \frac{2g}{\omega}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

由上述表达式，我们可以得到最后的解析结果：

$$\begin{aligned} F(t) &\equiv O_{M,M}(t) \\ &= [n(J, M)]^2 \int d\theta e^{-i(J+M)\theta} \int d\theta' e^{i(J+M)\theta'} \\ &\quad \prod_{k=1}^N \int \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \exp[-\beta \frac{1}{2} p_k^2] \cdot \varphi(\theta, \theta', t) dp_k. \end{aligned} \quad (4.67)$$

考虑到上述表达式比较复杂，下面我们将给出上述方程的数值解。很显然，在给定实耦合常数 g 和二能级原子的跃迁频率 ϵ 后，系统的量子漏损和保真度都依赖于原子总数 $N (= 2J)$ ，初始对称态的磁量子分量 M ，光场圆频率 $\omega_L (\propto q)$ 和温度 $T (\beta = 1/k_b T)$ 。下面分情况来看保真度对它们的依赖程度。

首先考虑对原子总数 N 的依赖关系。为方便起见，令初始时刻原子系综处于对称态 $|J, M\rangle$ ，温度取为室温 ($T = 300K$)。同时，给定光场频率 ω_L 。图 4.4(a) 给出了保真度 F 的模方随时间的演化情况。当时间为 0 时， $|F|^2$ 为 0。随着时间增长，它将会在短时间出现塌缩，而在较长时间内出现恢复现象 [115]。相对于不同的粒子数 N ，其恢复峰的“周期”相同，但是峰的高度随着 N 的增加急剧减少，峰的宽度也越来越窄。图 4.4(b) 列出了 $|F|^2$ 在第一次减少到 $1/2$ 时的时间 $t_{1/2}$ 原子数的关系图。根据图 4.4 的数值结果， $t_{1/2}$ 随 N 增加迅速减少，近似地为 N 的指数衰减函数。很显然，对于宏观的系综原子数 N ，上述的塌缩将是很快的，而量子恢复将不再发生。

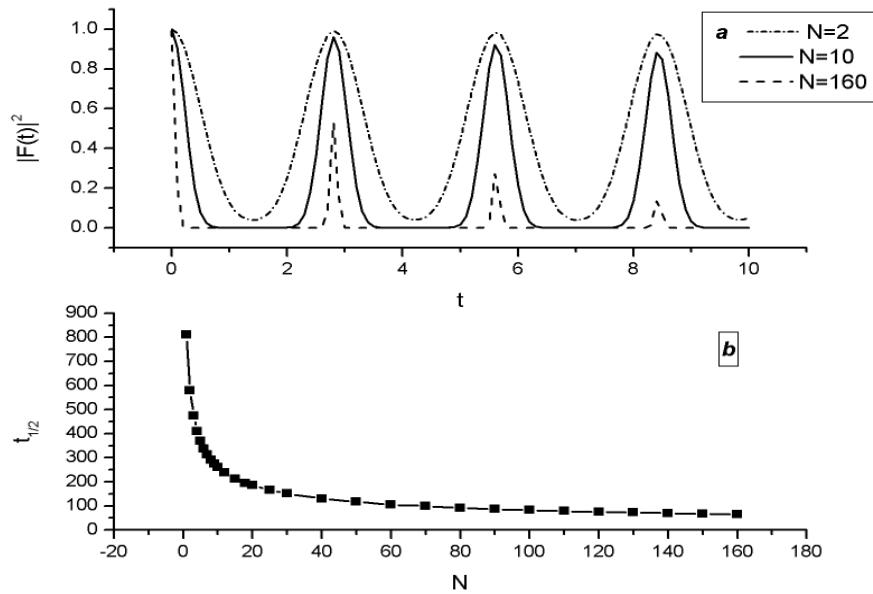


图 4.4: (a) 保真度模方 $|F(t)|^2$ 随时间演化的数值结果，三条曲线分别对应 $N = 2, 10, 160$ 。 (b) 相应一系列原子数目下的 $t_{1/2}$ 的数值结果。

同时，我们还考虑了对于给定 N 时不同的 M 对于保真度的影响。图 4.5 表明，对于 $M \rightarrow -J$ 时，具有较长的 $t_{1/2}$ 。也就是说，当系综中仅有极少数原子处于激发态时将有较好的演化结果。

下面来研究表征原子空间运动的温度对于保真度的影响。数值结果表明，随着温度的升高，保真度模方第一次演化到 $1/2$ 的时间 $t_{1/2}$ 迅速减少，而当温度趋于 0 时，它趋于一个有限值而并不是趋于无穷，见图 4.6。对于这种现象的一个直观的物理解释是，温度越高，原子空间运动越剧烈， e^{-iqx_k} 带来的影响越大，从而保真度越少而量子漏损越大。当温度越来越低，直至接近于零温时，原子的动

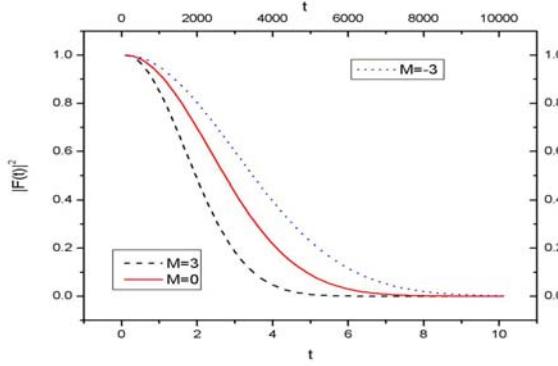


图 4.5: 保真度模方随时间演化的衰减图。三条曲线分别对应于 $M = -3, 0, 3$ (具有相同的 $N = 6$)。注意, $M = -3$ 的曲线相应于顶部的长时间轴, $M = 0, 3$ 相应于底部的短时间轴。

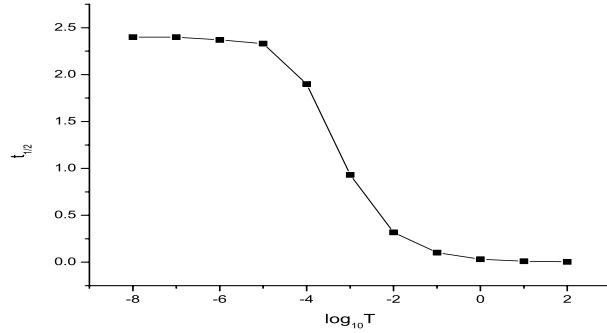


图 4.6: 不同温度下的 $t_{1/2}$ 的数值结果。注意横轴是温度的对数坐标。

量接近一个极限值, 原子空间位置保持变化很少。但是, 根据测不准关系, 它决不会趋于零。所以, 当温度越来越低时, 其量子耗损会变得很小但不会趋于 0。

最后我们考虑了失谐量 ω (注意 $\omega = \epsilon^{(k)} - \omega_L$, $q \propto \omega_L$) 对于保真度的影响。从图 4.7 中发现, 对于大失谐情况 $\omega \gg g$, 保真度将会相对的变得很好, 并随时间具有高频振动 (图 4.7 中的 c 线)。这个结果应该是合理的。这是因为在大失谐情况下, 行波场与原子相互作用较小, 忽略 e^{-iqx_k} 所带来的漏损相应也要小。相反, 当失谐变小时, 保真度相应变得较差, 其随时间演化的振动频率也较低。但是, 一个有趣的现象是, 不同的失谐量情况下, 保真度模方的时间演化具有相同的包络。不过从图 4.7 中可以看到, 尽管包络线不随失谐量的改变而改变, 但却很强地依赖于系综原子数目 N 。

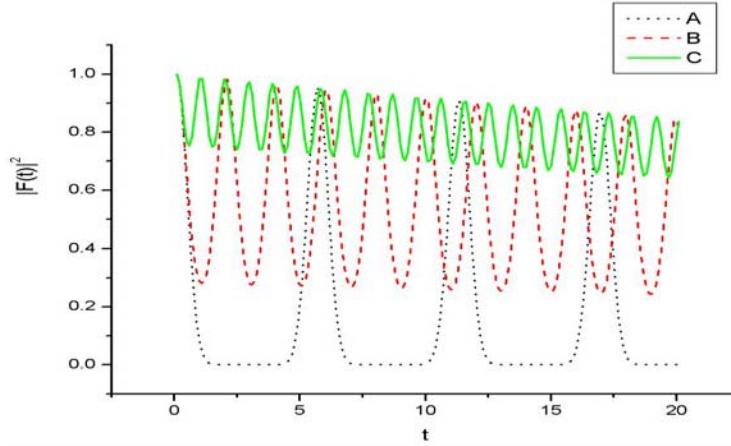


图 4.7: 相应不同失谐 ω 时的保真度模方随时间的演化。曲线 A 对应 $\omega = 1$ ， 曲线 B 对应 $\omega = 3$ ， C 对应 $\omega = 10$ 。

迄今为止已经考虑了初态为 $|J, M\rangle$ 时量子漏损的时间演化。事实上，初态为叠加态的情况也同样可以考虑。对于以下的叠加态

$$\Psi(0) = \sum_M C_M |J, M\rangle, \quad (4.68)$$

量子漏损为

$$L(t) = 1 - |\langle \phi_0(t) | \phi(t) \rangle|^2 = 1 - \left| \sum_M \sum_{M'} C_M^* C_{M'} O_{M,M'}(t) \right|^2, \quad (4.69)$$

其中，非对角元 $O_{M,M'}(t)$ 的计算类似于对角元 $O_{M,M}(t)$ 的计算，其表达式为

$$\begin{aligned} O_{M,M'}(t) &= n(J, M') \cdot n(J, M) \int d\theta e^{-i(J+M)\theta} \int d\theta' e^{i(J+M')\theta'} \\ &\quad \prod_{k=1}^N \int \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \exp[-\beta \frac{1}{2} p_k^2] \cdot \varphi(\theta, \theta', t) dp_k. \end{aligned} \quad (4.70)$$

数值计算的结果显示，非对角元的值很接近于 0。因此，只需考虑对角元的贡献，此时量子漏损的演化情况与先前的计算结果是类似的。

本节分析和讨论了在二能级原子系综与行波光场相互作用下，处于集体内部对称空间的初态随时间演化时保持在集体对称空间的程度，也就是所谓的保真度（如果考察其偏离程度即是量子漏损）。结果表明，保真度模方在短时间内行为内出现塌缩，且随原子总数增加具指数衰减关系。尽管保真度模方在较长时间里可能出现恢复，但其恢复的高度也随原子总数增加显著减少（即使是在初态为

$|J, M = -J\rangle$ 的最好情况)。此外, 关于温度对保真度的影响的分析也表明, 尽管在较低的温度时具有较好的保真度, 但是人们不可能通过较低温度的办法来达到完全消除量子漏损。有关不同失谐量情况下的讨论似乎表明, 可以借助大失谐条件来达到较好的保真度。但是, 基于两个原因, 在实际中也是很难实现的: 一、图 4.7 表明, 保真度时间演化的包络衰减不随失谐量而改变, 相反它随原子数目增加显著减少; 二、大失谐情况下, 光与原子相互作用相应减少, 用原子系综来存贮光的信息时并不能有效地减少量子耗损。总而言之, 我们的研究表明, 在二能级原子系综与行波光场模型中, 系统的保真度将随着原子数目 N 的增大而减少。因此, 在利用原子系综存贮量子信息的研究中, 量子漏损将是一个不可忽略和回避的问题。这一点与本章上节中关于量子计算退相干效应普适性分析是极为相似的。

§4.4 小结和讨论

本章主要讨论了使用原子系综集体激发准自旋态来处理量子信息量子计算时可能会出现的一些问题。首先, 以二能级原子系综为例, 重新引入了集体激发的概念, 并严格证明了在大 N 极限和低激发条件下原子系综集体激发可以当做一个玻色算符处理, 这样可以使得问题的处理大大简化, 事实上, 本文的重点第五章和第六章都是基于原子系综集体激发当做玻色算符处理的基础上进行的。我们同时注意到原子系综中存在的退相干影响会起到一定的破坏作用。本章的普适性分析表明当存在非均匀的耦合系数时, 耦合系数 \sqrt{N} 倍增强所带来的好处刚好会被退相干率相应的 \sqrt{N} 倍的增强所抵消。对自由原子系综的空间运动所导致退相干影响的研究也表明, 系统的这种退相干影响也会随着 N 的增加而增大。

当然, 我们也注意到上述的讨论是在一般普适的意义上进行的, 本章的结论是在量子信息过程中使用集体自旋态理论上似乎并不太具有更好的优越性。这并不是说原子系综完全不能用来处理量子信息。事实上对于实际的原子系综系统, 可以通过一些具体的控制来抑制这种由于非均匀耦合或者空间运动带来的退相干。

首先, 人们可以在实验中尽量减少系统耦合系数的非均匀度, 尽可能的减少非均匀耦合所带来的退相干的影响。从而使得在近似的处理下基于原子系综对称化集体激发来处理这样的系统是有效的。

其次, 对于空间运动带来的影响, 可以使用低温下的原子气体系综, 这样原

子的空间运动速度比较的小，从而可以抑制由于空间运动所带来的退相干的影响。特别地，实验上可以使用 BEC 来取代原子系综，也可以使用光晶格中的原子或者利用其它的囚禁势阱来限制原子的空间位置和运动，从而达到减少空间运动所带来的退相干影响的目的。

第五章 Λ 型原子系综集体激发的 EIT

上一章指出了一般情况下利用原子系综处理与外场相互作用问题时存在着一些问题，但是同时也应该看到利用原子系综理论来处理问题时的优点。如果能尽量减少非均匀度，减少空间运动带来的影响，那么利用原子系综集体激发来考虑和处理问题将极为简单有效。此外，从第三章中还可以看到，在处理基于 EIT 的原子系综中量子探测光的传播和存贮问题时，集体激发的方法体现了其强大的效力。

本章将介绍我们关于 Λ 型三能级原子系综 EIT 系统的研究工作。我们从原子系综集体激发的角度重新考察了第三章中所研究过的基于 EIT 的原子系综中量子探测光的传播和存贮问题。相对于 Fleischhauer 等人的方法，我们进行了一些改进补充和进一步的扩展。本章工作的主要出发点在于：（一）Fleischhauer 等人的自由原子系综方案中不可避免的存在原子空间运动所带来的退相干问题，基于这一点，我们考虑将原子人为地固定在晶格上从而避免其空间影响；（二）考虑到 Fleischhauer 的方法不够简洁，我们提出了一种更为简单的动力学对称性代数的方法；（三）利用我们的方法可以很简单地进一步将基于单光子共振的 EIT 机制推广到两光子共振 EIT 的情况。下面详细介绍这些工作。

§5.1 单光子共振 EIT “原子晶体”的能谱结构与隐藏动力学对称性

第三章介绍了 Fleischhauer 等人使用原子集体激发的方法研究了基于 EIT 的 Λ 型三能级原子系综中量子探测光的传播和存贮问题。那里提到他们使用的原子系综是由自由原子组成的，必然存在原子的空间运动。根据第四章关于二能级原子系综空间运动所带来退相干影响的研究，我们有理由相信三能级原子系综中这种空间运动也会带来相应的退相干问题。为避免这种影响，我们提出了一种新的方案 [118]。在我们的方案中，利用固定在“晶格”上的 Λ 型三能级原子系综的集体准自旋激发作为新型的量子存贮 (quantum storage)，集体的准自旋波激发代替了原来方案中的全对称激发。特别是，我们发现这种新型的量子记忆体与光场相互作用隐藏着半直积群 $SU(2) \otimes h_2$ 描述的动力学对称性。这个动力学对称性的发现，使得我们能够比较完整地构造出整个系统的低激发能谱，从而可以通过对称分析的方法，证明量子记忆子空间的稳固性。

所考虑的模型是如图 5.1 所示的由 N 个固定在晶格上的同种原子组成。每

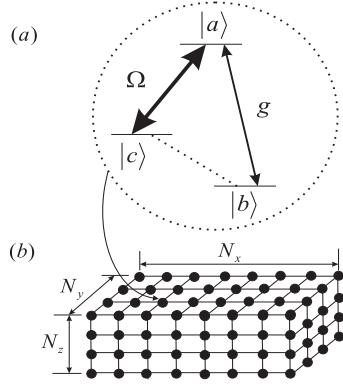


图 5.1: Λ 型三能级原子构成的原子晶体示意图。 (a) 三能级原子与经典控制场和量子探测场共振耦合; (b) 原子晶体的结构。

个 Λ 型三能级原子的激发态、基态和居中的亚稳态分别记为 $|a\rangle$ 、 $|b\rangle$ 和 $|c\rangle$ 。所有原子都均匀地与两个单模光场作用: $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$ 的跃迁与量子探测场共振耦合 (耦合系数为 g , 量子光场湮没算符为 a) , $|a\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ 的跃迁与经典控制场共振耦合 (耦合强度即 Rabi 频率为 Ω)。为简单起见, g 和 Ω 取为实数并且对所有原子是等同的。引入 $\mathbf{j} = (a_x j_x, a_y j_y, a_z j_z)$ 来标识第 j 个格点上的原子位置, 其中 a_u 是沿着 u 方向的晶胞长度, $j_u = 1, 2, \dots, N_u (u = x, y, z)$ 。那么整个系统的量子力学由以下的相互作用表象中的哈密顿量描述:

$$H = ga \sum_{j=1}^N \exp(i\mathbf{K}_{ba} \cdot \mathbf{j}) \sigma_{ab}^{(j)} + \Omega \sum_{j=1}^N \exp(i\mathbf{K}_{ca} \cdot \mathbf{j}) \sigma_{ac}^{(j)} + h.c., \quad (5.1)$$

其中 $N = N_x N_y N_z$, 而 \mathbf{K}_{ba} 和 \mathbf{K}_{ca} 分别表示量子和经典光场的波矢。当 $\alpha \neq \beta$ 时, 准自旋算符 $\sigma_{\alpha\beta}^{(j)} = |\alpha\rangle_{jj}\langle\beta| (\alpha, \beta = a, b, c)$ 描述了原子能级 $|a\rangle$ 、 $|b\rangle$ 和 $|c\rangle$ 之间的跃迁。

由于要考虑具体的量子存储需要根据其量子态的映射规则, 这使得必须根据具体的系统定义其基态。对于上述系统, 定义 $|v\rangle = |b_1, b_2, \dots, b_N\rangle$ 作为系统中原子集体部分的基态, 其含义是所有 N 个原子都处于单粒子基态 $|b\rangle$ 。很显然, 根据 (5.1) 式, 从基态 $|v\rangle$ 出发, 相互作用的一阶二阶过程将产生激子自旋波态 $|1_a\rangle$ 和 $|1_c\rangle$:

$$|1_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{i\mathbf{K}_{bs} \cdot \mathbf{j}} |b, b, \dots, \overbrace{s}^{j-th}, \dots, b\rangle, \quad s = a, c. \quad (5.2)$$

引入 $\mathbf{K}_{bc} = \mathbf{K}_{ba} - \mathbf{K}_{ca}$ 表示二阶跃迁 $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ 的波矢, 如图 5.2。这种二阶跃

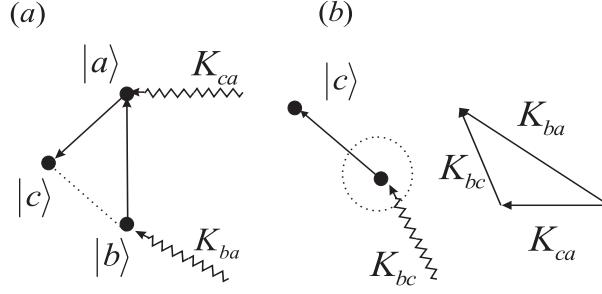


图 5.2: 由两光场导致的 $|b\rangle \rightarrow |a\rangle \rightarrow |c\rangle$ 的原子两阶跃迁过程。其中三个原子跃迁过程相应的波矢 \mathbf{K}_{ba} , \mathbf{K}_{ca} 和 \mathbf{K}_{bc} 满足动量守恒。

迁也可以定义其集体算符:

$$C = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{K}_{bc}\cdot\mathbf{j}} \sigma_{bc}^{(j)}, \quad (5.3)$$

它满足 $|1_c\rangle \equiv C^\dagger |v\rangle$ 。相应地, $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ 跃迁的集体激发定义为

$$A = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{K}_{ba}\cdot\mathbf{j}} \sigma_{ba}^{(j)}, \quad (5.4)$$

它满足 $|1_a\rangle \equiv A^\dagger |v\rangle$ 。在大 N 极限和集体激发为低激发的条件 (仅极少数原子处于态 $|a\rangle$ 或 $|c\rangle$) [106] 下, 可以很容易验证下列关系成立:

$$\begin{aligned} [A, A^\dagger] &= 1, \quad [C, C^\dagger] = 1, \\ [A, C] &= 0, \quad [A, C^\dagger] = -T_-/N \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

这就是说, 上面引入的两个准自旋波激发将近似为两个独立的玻色算符。根据上述所定义的激子算符, 可将 (5.1) 式简化为

$$H = g\sqrt{N}aA^\dagger + \Omega T_+ + h.c., \quad (5.6)$$

其中引入了集体算符

$$T_- = \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{K}_{ca}\cdot\mathbf{j}} \sigma_{ca}^{(j)}, \quad T_+ = (T_-)^\dagger, \quad (5.7)$$

它们和第三个集体算符

$$T_3 = \sum_{j=1}^N (\sigma_{aa}^{(j)} - \sigma_{cc}^{(j)})/2 \quad (5.8)$$

刚好构成一个 $SU(2)$ 的代数结构。

我们感兴趣的是研究激子算符和 $SU(2)$ 代数生成元如何构成一个更大的李代数。事实上通过直接的计算有

$$[T_-, C] = -A, \quad [T_+, A] = -C. \quad (5.9)$$

如果标识算符 A 、 A^\dagger 、 C 和 C^\dagger (还有单位元 $\mathbf{1}$) 所构成的李代数为 h_2 ，那么上述关系 (5.9) 式表明：

$$[SU(2), h_2] \subset h_2. \quad (5.10)$$

这意味着在大 N 极限和低激发条件下，算符 A 、 A^\dagger 、 C 、 C^\dagger 、 T_3 、 T_\pm 和单位元 $\mathbf{1}$ 构成了一个半直积的李代数： $SU(2)\overline{\otimes}h_2$ 。

既然哈密顿量 (5.6) 由半直积代数 $SU(2)\overline{\otimes}h_2$ 的生成元所表达，那么可以说这个两模激子系统的动力学对称演化将由动力学群 (或称动力学代数) $SU(2)\overline{\otimes}h_2$ 所决定。利用谱生成代数的方法 [119]，上述动力学对称性的发现使我们能够找到哈密顿量 H 的不变子空间，从而使得可以很容易地将哈密顿量对角化。

为此，可以定义

$$D = a \cos \theta - C \sin \theta, \quad (5.11)$$

其中 $\theta(t)$ 满足 $\tan \theta(t) = \frac{g\sqrt{N}}{\Omega(t)}$ 。算符 D 表征一个准粒子极化子，它表示混合了量子光场和原子的准自旋波集体激发。 D 满足的重要关系为：

$$[D, D^\dagger] = 1, \quad [D, H] = 0. \quad (5.12)$$

这意味着由 D 和 D^\dagger 生成的 Heisenberg-Weyl 代数群是两模激子—光场系统的一个对称性群。引入态 $|0\rangle = |v\rangle \otimes |0\rangle_l$ 作为总系统的基态，其中 $|0\rangle_l$ 是量子光场的真空态。那么可以发现 $D|0\rangle = 0$ ，态 $|0\rangle$ 是整个系统的本征值为 0 的本征态。因此，可以利用这些关系来生成系统哈密顿量的一系列简并的本征值为 0 的本征态：

$$|d_n\rangle = [n!]^{-1/2} D^{\dagger n} |0\rangle. \quad (5.13)$$

类似于第三章处理自由原子系综中情况，上述的这些缀饰态也就是相应的所谓的暗态 [15, 16, 38]，因此 D 称为暗态极化子算符 [38]。

在第三章中介绍的 Fleischhauer 等人的工作中，他们只提到本征值为 0 的一系列暗态。事实上，除此以外，系统中还存在其它的本征态。下面从谱生成代数出发来寻找其它的这些本征态。

首先引入所谓的亮态极化子算符

$$B = a \sin \theta + C \cos \theta, \quad (5.14)$$

很容易验证:

$$[B, B^\dagger] = 1, \quad [D, B^\dagger] = [D, B] = 0. \quad (5.15)$$

此外,

$$[A, B] = [A, B^\dagger] = 0 \quad (5.16)$$

意味着在大 N 极限和低激发条件下 A 与 C 、 C^\dagger 对易。最关键的是，如果定义 $Q_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A \pm B)$ ，那么有以下关系：

$$[H, Q_\pm^\dagger] = \pm \epsilon Q_\pm^\dagger, \quad (5.17)$$

其中 $\epsilon = \sqrt{g^2 N + \Omega^2}$ 。利用这个重要关系可以构造出系统的本征态：

$$|e(m, k; n)\rangle = [m!k!]^{-1/2} Q_+^{\dagger m} Q_-^{\dagger k} |d_n\rangle, \quad (5.18)$$

其相应的本征值为

$$E(m, k) = (m - k)\epsilon, \quad (m, k = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.19)$$

这样就得到了一系列的总个相互作用系统的本征态，它包括了前面提到的本征值为 0 的一系列暗态（式 (5.18) 中 $m = k = 0$ ），也包括一系列本征值也为 0 但却不同于暗态的本征态（式 (5.18) 中 $m = k \neq 0$ ），我们将这些态简记为 $|d(m, n)\rangle$ ，它们是通过将 $Q_+^\dagger Q_-^\dagger$ 作用于 $|d_n\rangle$ 上 m 次而产生的：

$$\begin{aligned} |d(m, n)\rangle &= [m!]^{-1} Q_+^{\dagger m} Q_-^{\dagger m} |d_n\rangle \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{A^{\dagger 2(m-k)} B^{\dagger 2k}}{2^m (m-k)! k!} |d_n\rangle, \end{aligned} \quad (5.20)$$

因此，此时总个系统的对称化态空间并不再仅仅是象第三章中提到的由暗态构成的空间 $\{|d_n\rangle \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ ，而是由所有这些本征态 $|e(m, k; n)\rangle (m, k, n = 0, 1, 2, \dots)$ 组成的空间。此时如果要采用第三章中提到的基于由暗态构成的空间 $\{|d_n\rangle \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ 来考虑量子存贮方案，那么必须考虑到以下一些以往没有考虑过的问题：(1) 在量子信息的存贮和提出过程中涉及到系统参数的绝热操

纵，那些文献 [38, 39] 中没有定量指出究竟参数的改变需要多慢才满足绝热条件；(2) 系综中存在与暗态简并的一系列本征态，这些简并态之间在绝热演化过程中是否会存在跃迁，从而可能破坏这种量子存贮的有效性。

下边以暗态向其它态（包含其它暗态）跃迁的量子绝热计算为例来讨论其要满足的绝热条件。记由所有对称化的态构成的空间为

$$\mathcal{V}^s = \{|e(m, k; n)\rangle \mid m, k, n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (5.21)$$

由本征值不为 0 的态构成的空间记为

$$\mathbf{CS} = \{|e(m, k; n)\rangle \mid m \neq k, m, k, n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (5.22)$$

其互补空间也就是由本征值为 0 的态构成的空间记为

$$\mathbf{S} = \{|d(m, n)\rangle \mid m, n = 0, 1, 2, \dots\}. \quad (5.23)$$

空间 \mathbf{S} 根据 m 值的不同可以分解为一系列空间的直和：

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{[0]} \oplus \mathbf{S}^{[1]} \oplus \dots, \quad (5.24)$$

其中

$$\mathbf{S}^{[m]} = \{|d(m, n)\rangle \mid n = 0, 1, 2, \dots\}. \quad (5.25)$$

其实， $\mathbf{S}^{[0]}$ 刚好是前面指出的最为关注的暗态存贮空间 $\{|d_n\rangle \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ 。我们下面需要考察的是处于子空间 $\mathbf{S}^{[0]}$ 的暗态叠加态在怎样的绝热条件下是否仍然能够保持在这个存贮子空间中。

首先考虑 $|d(m, n)\rangle$ 与其非简并态 $|e(m', k'; n')\rangle$ 之间的绝热问题。先根据非简并态量子绝热定量，其所满足的关系是 [120, 121]：

$$\left| \frac{\langle e(m', k'; n') | \partial_t | d(m, n) \rangle}{E(m', k')} \right| \sim \frac{g\sqrt{N} |\Omega(t)|}{\epsilon^3} \ll 1, \quad (5.26)$$

（严格推导参阅附录二）。也就是说，当系统参量的变化使得上式能够满足的话，在系统的绝热演化过程中不会存在有暗态子空间 $\mathbf{S}^{[0]}$ 的态向其非简并态空间 \mathbf{CS} 的跃迁。

下面来考虑是否在空间 \mathbf{S} 中出现子空间 $\mathbf{S}^{[i]}$ 向其简并态空间 $\mathbf{S}^{[j]}$ ($i \neq j$) 的跃迁)。根据简并态的绝热理论，处于 $\mathbf{S}^{[m]}$ 上的任意态 $|\phi^{[m]}(t)\rangle = \sum_n c_n^{[m]}(t) |d(m, n)\rangle$ ，其瞬时系数满足

$$i \frac{d}{dt} c_n^{[m]}(t) = \sum_{m', n'} D_{mn}^{m' n'} c_{n'}^{[m']}(t) + F[\mathbf{CS}], \quad (5.27)$$

其中 $F[CS]$ 表示向互补空间 CS 的跃迁，在绝热条件下向 $F[CS]$ 中的态的跃迁可以忽略。其中

$$D_{m'n'}^{mn} = -i \langle d(m', n') | \partial_t | d(m, n) \rangle. \quad (5.28)$$

根据

$$\partial_\theta B = D, \quad \partial_\theta D = -B, \quad (5.29)$$

可以化简为：

$$D_{m'n'}^{mn} = -i \dot{\theta} \langle d(m', n') | \partial_\theta | d(m, n) \rangle. \quad (5.30)$$

详细的计算表明 $\partial_\theta |d(m, n)\rangle$ 中包含有四项：

$$|e(m, m \mp 1; n \pm 1)\rangle, \quad |e(m \mp 1, m; n \pm 1)\rangle, \quad (5.31)$$

这意味着

$$\langle d(m', n') | \partial_\theta | d(m, n) \rangle \equiv 0, \quad (5.32)$$

也就是说，在绝热演化过程中，处于子空间 $S^{[m]}$ 上的态不会向其它的简并子空间的态跃迁。

综合上面的讨论，我们得知在绝热条件下，每个子空间 $S^{[m]}$ 理论上都可以用来做为独立的量子存储空间，而不是象第三章中提到的只有 $S^{[0]}$ 才能作为量子存储空间。引入标记

$$|\mathbf{A}, \mathbf{P}, m\rangle = \frac{1}{2^m m!} (A^{\dagger 2} - P^{\dagger 2})^m |\mathbf{0}\rangle, \quad (5.33)$$

其中 $\mathbf{P}=\mathbf{a}$ ， \mathbf{C} 。假设绝热操纵使得初始时 $\theta = 0$ 变化到最终时刻的 $\theta = \pi/2$ ，那么初态和末态都可以写成因子化的形式：

$$|d(m, n)\rangle|_{\theta=0} = |\mathbf{A}, \mathbf{C}, m\rangle \otimes |n\rangle_L, \quad (5.34)$$

$$|d(m, n)\rangle|_{\theta=\pi/2} = |n\rangle_C \otimes (-1)^n |\mathbf{A}, \mathbf{a}, m\rangle, \quad (5.35)$$

其中 $|n\rangle_L$ 、 $|n\rangle_C$ 分别表示光场和 C 模激子的 Fock 态。更广泛地，记初始时要被存储的单模量子光场态为

$$|s(0)\rangle_L = \sum_n c_n |n\rangle_L, \quad (5.36)$$

记原子系统中激子的态为 $|\mathbf{A}, \mathbf{C}, m\rangle$ 。当通过绝热改变耦合强度 $\Omega(t)$ 使得混合角 θ 从 0 变到 $\pi/2$ 时，整个系统的态将变为 C 模准自旋波与其它部分解耦的态：

$$|S(t)\rangle = \left(\sum_n c_n |n\rangle_C\right) \otimes |\mathbf{A}, \mathbf{a}, m\rangle. \quad (5.37)$$

从量子测量的观点来看，其解码过程必须对光场态和 A 模激子态求平均，这样得到一个关于 C 模准自旋波的纯态密度矩阵： $\rho_C = \sum_{n,m} c_n c_m^* |n\rangle_{cc} \langle m|$ ，这个态与初始时的光场态是一样的。因此，当激发态的衰减时间与绝热操作的特征时间相比足够长的话，上述讨论给出了一个新的存贮量子信息的一个方案。但是值得注意的是，由于一般的态 $|d(m, n)\rangle$ 中包含有单原子的激发态，因此 $|d(m, n)\rangle$ 在实验上来说并不完全足够的“暗”。如果原子激发态衰减比较快的话，会导致对量子存贮应用的负面影响。从这一点来看，理论上所有的子空间 $\mathbf{S}^{[m]}$ 都可以用来做为独立的量子存贮空间，但是在实际中最理想的且最容易实现的显然是暗态子空间 $\mathbf{S}^{[0]}$ 。

最后我们强调，尽管当前考虑的是针对固定在规则晶格点上的原子系统，实际上我们的方法对于空间位置固定但分布不规则的原子系统也是有效的，对于空间运动速度缓慢而可以忽略其空间运动的自由原子系综系统，我们的方法也是有效的。另外需要强调的是，当前的分析都是针对低密度的集体激发而言才成立的，因为此时集体激发才能等效于玻色算符来处理。当然，如果所有的集体激发都是极高的密度的时候 ($m, n \sim N$)，也可以用类似的方法来处理，但是在集体激发既不太高也不太低的中间区域，集体激发算符的玻色对易关系必须调整为 q 变形的对易关系 ($q = 1 - O(\frac{1}{N})$) [104, 106]。从物理上来看，这个调整会使计算变得比较复杂，且会引起激子系统中集体自由度的量子退相干。本论文暂不考虑 q 变形玻色对易关系的情况。

§5.2 多模探测光情况下的量子存贮和传播

上节详细讨论了基于原子晶格集体激发的 EIT 系统用于量子存贮的强固性。为了避免原子空间运动所带来的影响，我们提出了一个将原子固定于晶格上的方案。详细的研究表明系统中原子的准自旋波集体激发形成了一个两模激子系统，并且具有 $SU(2) \otimes h_2$ 的半直积的代数结构。由此可以利用该系统来进行量子存贮。另一方面，如果要考虑光在介质中的传播，一般都是考察它在介质中传播的群速。考虑群速事实上必须针对一个波包而言，波包中是包含有多个频率模

式的。一般地实验上的光场严格说来都是一个波包，因此当探测光场很弱时我们可以把它处理成是一个多模量子波包。本节将参考我们的工作 [122]，详细讨论多模量子光场在那样的三能级 Λ 型原子系统中的暂态传播问题。

当前所研究的系统和上节的系统很近似，不同之处是量子探测光场改用多模量子光场，此外，需要指出的是，本节提出的所谓原子系统可以是上节中指出的原子晶格，也可以是忽略了空间运动的均匀分布的自由原子系综（见图 5.3）。这里考虑的量子光场是在频率上是一个高斯分布，其中心频率 ω_0 刚好等于原子 $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ 跃迁的频率 ω_{ab} 。我们假定波包的频率宽度很窄，比方频宽 $\Delta\omega \ll \Omega$ ，这样可以近似地认为多模量子光场的所有模式都与原子 $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ 跃迁共振。那么在相互作用表象下系统的相互作用哈密顿量可以写为：

$$H_I = \sum_{j=1}^N \sum_k g_k a_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j) \sigma_{ab}^{(j)} + \Omega \sum_{j=1}^N \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \sigma_{ac}^{(j)} + h.c., \quad (5.38)$$

其中 \mathbf{r}_j ($j = 1, 2, \dots, N$) 标识第 j 个原子的空间位置， N 是原子的总数， \mathbf{k} 是量子光场中第 k 个模式的波矢， \mathbf{q} 是经典光场的波矢。 $\sigma_{\alpha\beta}^{(j)} = |\alpha\rangle_{jj}\langle\beta|$ ($\alpha, \beta = a, b, c$ 且 $\alpha \neq \beta$) 是能态 α 和 β 之间的反转算符。量子光场中第 k 个模式与原子的耦合系数为 $g_k = -\wp \sqrt{\frac{kc}{2\hbar\epsilon V}}$ ，其中 \wp 是能态 $|a\rangle$ 、 $|b\rangle$ 之间的偶极矩。经典控制光场的 Rabi 频率仍然记为 Ω 。为简单起见， g_k 和 Ω 假定是实的且对各个原子是等同的。

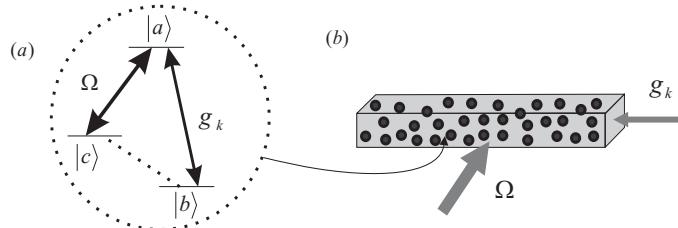


图 5.3: 模量子光场在 Λ 型原子 EIT 系统中的量子存储。（a）原子两跃迁分别与经典控制光场和多模量子光场共振耦合；（b）两光场从不同方向射入原子系统并与之相互作用。

在上节研究单模光场时定义的集体激发算符的基础上，我们引入以下一簇集体激发算符来讨论多模量子光场的情况：

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} \sigma_{ba}^{(j)}, \quad A_k^\dagger = (A_k)^\dagger, \quad (5.39)$$

显然, A_k^\dagger 是相应于量子光场波矢 \mathbf{k} 的原子 $|b\rangle$ 态到 $|a\rangle$ 态的集体激发算符, A_k 是其共轭算符。相应地可以引入一簇从原子态 $|b\rangle$ 到 $|c\rangle$ 的虚拟的集体激发算符:

$$C_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{Q}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j} \sigma_{bc}^{(j)}, \quad C_k^\dagger = (C_k)^\dagger, \quad (5.40)$$

其中 $\mathbf{Q}(\mathbf{k}) = \mathbf{k} - \mathbf{q}$ 是满足虚拟集体跃迁过程中的动量守恒而引入的虚拟集体激发的“波矢”。这些集体激发算符产生了原子系统中最广泛的激发:

$$|\mathbf{m}, \mathbf{n}\rangle = \prod_k \left(\frac{1}{\sqrt{m_k! n_k!}} A_k^{\dagger m_k} C_k^{\dagger n_k} \right) |\mathbf{b}\rangle, \quad (5.41)$$

其中 \mathbf{m} , \mathbf{n} 是下式的缩写

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots), \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots), \quad (5.42)$$

$|\mathbf{b}\rangle = |b, b, \dots, b\rangle$ 是原子的集体基态, 它表示所有的 N 个原子都占据在单原子基态 $|b\rangle$ 。其中最为简单的单个集体激发态记为: $|1_a\rangle_k \equiv A_k^\dagger |\mathbf{b}\rangle$ 和 $|1_c\rangle_k \equiv C_k^\dagger |\mathbf{b}\rangle$, 详细表达式为:

$$\begin{aligned} |1_a\rangle_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} |b, b, \dots, \overbrace{a}^{j-th}, \dots, b\rangle, \\ |1_c\rangle_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N e^{i\mathbf{Q}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j} |b, b, \dots, \overbrace{c}^{j-th}, \dots, b\rangle. \end{aligned} \quad (5.43)$$

这些单激发态是很容易理解的, 它们是集体算符作用在原子集体基态上形成的集体准自旋波态。

下面仍然采用大 N 极限和低激发的条件来考虑这两类集体激发算符的性质。在大 N 极限和低激发条件下, 它们满足以下对易关系:

$$\begin{aligned} [A_k, A_{k'}^\dagger] &= \delta_{k,k'}, \quad [C_k, C_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}, \\ [A_k, C_{k'}^\dagger] &= [A_k, C_k^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

为了证明上述关系, 首先注意到在低激发条件下

$$\sum_{j=1}^N e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j} (\sigma_{bb}^{(j)} - \sigma_{aa}^{(j)}) \approx \sum_{j=1}^N e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j} \sigma_{bb}^{(j)}, \quad (5.45)$$

于是有

$$\begin{aligned}[A_k, A_{k'}^\dagger] &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j} (\sigma_{bb}^{(j)} - \sigma_{aa}^{(j)}) \\ &\simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j}.\end{aligned}$$

对于一个空间尺度远远大于光学波长的原子晶体 (或者低温下的自由原子系综介质)，根据固体理论的结果，有

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j} = \delta_{k,k'}. \quad (5.46)$$

所以

$$[A_k, A_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'} \quad (5.47)$$

近似成立。其它公式可以类似地证明。根据公式 (5.44)，可以看出 A_k 和 C_k 描述了系统的一系列独立的玻色类型的集体激发过程。这些算符的重要性在于它们对于哈密顿量 (5.38) 定义了一个不变的子空间：

$$V_C : \text{span}\{|\mathbf{m}, \mathbf{n}\rangle | \mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots), \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots)\}. \quad (5.48)$$

这表明，在哈密顿量的驱动下，任何来自空间 V_C 的集体态在以后的演化中都仍然将属于空间 V_C 。由此我们可以从集体激发的角度出发来描述系统的量子力学过程。

下面引入附加的集体算符

$$T_- = \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j} \sigma_{ca}^{(j)}, \quad T_+ = (T_-)^\dagger, \quad (5.49)$$

它们与原子 $|c\rangle \rightarrow |a\rangle$ 的二阶跃迁过程相联系。如果引入以下的集体算符

$$T_3 = \sum_{j=1}^N (\sigma_{aa}^{(j)} - \sigma_{cc}^{(j)}) / 2, \quad (5.50)$$

那么此三个算符刚好构成 $SU(2)$ 的代数结构。在大 N 极限和低激发条件下，可以很容易地计算出 $SU(2)$ 中的算符与算符 A_k 、 C_k 之间的对易关系，它们之间的不为零的关系为：

$$\begin{aligned}[T_-, C_k] &= -A_k, \quad [T_+, A_k] = -C_k, \\ [T_+, C_k^\dagger] &= A_k^\dagger, \quad [T_-, A_k^\dagger] = C_k^\dagger.\end{aligned} \quad (5.51)$$

上述封闭的对易关系表明在用集体算符表述的相互作用哈密顿量

$$H_I = \sum_k g_k \sqrt{N} a_k A_k^\dagger + \Omega T_+ + h.c. \quad (5.52)$$

中存在一个半直积的动力学群的代数 $G_d = SU(2) \bar{\otimes} \Xi$ ，因为它满足关系

$$[SU(2), \Xi] \subset \Xi, \quad (5.53)$$

其中 Ξ 是由 A_k 、 C_k 、 A_k^\dagger 、 C_k^\dagger ($k = 1, 2, \dots$) 构成的 Heisenberg-Weyl 代数结构。事实上 G_d 的动力学对称性是单模量子光场情况下的一个直观推广。利用这个对称性（参阅附录一），相互作用哈密顿量 H_I 可以利用谱生成代数方法 [119] 来研究系统的性质。

下面先考虑哈密顿量 H_I 分别与 G_d 中的生成元算符以及光场算符的对易关系：

$$\begin{aligned} [C_k, H_I] &= \Omega A_k, \quad [A_k, H_I] = \Omega C_k, \\ [a_k, H_I] &= g_k \sqrt{N} A_k. \end{aligned} \quad (5.54)$$

由此，可以定义暗态极化子算符：

$$D_k = a_k \cos \theta_k - C_k \sin \theta_k, \quad (5.55)$$

其中 θ_k 满足

$$\tan \theta_k = \frac{g_k \sqrt{N}}{\Omega}. \quad (5.56)$$

由公式 (5.54) 易得

$$[D_k, H_I] = 0, \quad (5.57)$$

这就是说，所有这些独立的暗态算符都与 H_I 对易，因此它们是稳定的。通过将 D_k^\dagger 作用在整个系统的基态 $|0\rangle = |\mathbf{b}\rangle \otimes |0\rangle_l$ ($|0\rangle_l$ 表示多模量子光场的真空态) 上得到系统的多模暗态：

$$|d(\mathbf{n})\rangle \equiv |d(\mathbf{n}, t)\rangle = \prod_k \frac{1}{\sqrt{n_k!}} D_k^{\dagger n_k} |0\rangle, \quad (5.58)$$

根据上述构造出的暗态簇，可以考虑利用原子系统的集体激发影响来存储和提取多模量子相干光的量子信息。事实上，通过绝热地改变系统的参量 Ω ，可以使系统的状态从多模光子的类型转换成多模集体激发的类型，从而实现了多模量

子信息的存贮；反之也可以把存贮于多模集体激发的信息绝热地转换成光子信息的类型而实现信息的提取。具体的操作过程和上一节相类似，这里不再重复。

需要指出的是，我们还可以定义一系列所谓的亮态极化子算符

$$B_k = a_k \sin \theta_k + C_k \cos \theta_k, \quad (5.59)$$

它也是光场算符和集体算符的混合，满足以下关系：

$$[D_k, B_k] = 0, \quad [B_k, B_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}, \quad (5.60)$$

因此， B_k 也是玻色极化算符。事实上，类似于本章上一节中有关单模量子光场时的情况，可以通过利用 B_k 和 D_k 来构造出系统的其它与本征暗态能量简并的一系列本征态。但是因为这些新的态包含有原子激发态 $|a\rangle$ 的集体激发，它们相对于暗态而言一般是不稳定的，而且在绝热演化中它们与暗态簇空间不会出现耦合，因此仅仅考虑了暗态的形式。为了简单起见，这里不详细讨论这种与暗态能量简并的系统集体态的具体形式。

以下我们来考虑系统的另一个方面，也就是考虑多模光在 EIT 介质中的动力学过程的暂态行为。我们的出发点是在给定系统的所有参数不变的情况下，假定在 $t = 0$ 时刻起多模量子光场与处于集体基态的原子介质开始相互作用，然后在不考虑原子衰减耗散等理想情况下考察量子光场在短时间内的暂态行为。

在海森堡表象中，相互作用哈密顿量下光场算符和原子集体激发算符的演化所满足的方程为：

$$\begin{aligned} \dot{a}_k &= -i\sqrt{N}g_k A_k, \\ \dot{A}_k &= -i\sqrt{N}g_k a_k - i\Omega C_k, \\ \dot{C}_k &= -i\Omega A_k, \end{aligned} \quad (5.61)$$

k 相应于量子光场中的第 k 个模式。从方程 (5.61) 中可以看出，对于每一个量子光场的模式 k ， a_k 、 A_k 和 C_k 的方程耦合在一起，而不同的 k 之间没有耦合。

本节前面已经提到，上述系统中原子集体算符之间存在半直积的代数结构 $G_d = SU(2) \bar{\otimes} \Xi$ ，如果考虑到由多模量子光场的产生湮灭算符 a_k^\dagger 和 a_k 构成的 Heisenberg-Weyl 群 Γ ，那么整个系统的代数结构为 $G = SU(2) \bar{\otimes} \Xi \otimes \Gamma$ 。因为方程 (5.61) 中没有出现 $SU(2)$ 中的生成算符 T_+ 、 T_- 和 T_3 ，所以这是很好求

解的。先将方程 (5.61) 转换为下列关于暗态极化算符和亮态极化算符的形式：

$$\begin{aligned}\dot{A}_k &= -i\sqrt{g_k^2 N + \Omega^2} B_k, \\ \dot{B}_k &= -i\sqrt{g_k^2 N + \Omega^2} A_k, \\ \dot{D}_k &= 0.\end{aligned}\quad (5.62)$$

从上式中看出由暗态算符作用在集体基态上构造出的暗态在时间演化中是不变的，并且与其它的态是完全解耦的。

如果给定初始时刻下 C_k 和 a_k 的值，可以得到 B_k 和 D_k 的精确的表达式：

$$D_k(t) = D_k(0) = a_k(0) \cos \theta_k - C_k(0) \sin \theta_k, \quad (5.63)$$

$$B_k(t) = \mathbf{O}_1 e^{-it\Theta_k} + \mathbf{O}_2 e^{it\Theta_k}, \quad (5.64)$$

其中

$$\mathbf{O}_1 = \frac{1}{2}(B_k(0) - A_k(0)), \quad \mathbf{O}_2 = \frac{1}{2}(B_k(0) + A_k(0)), \quad (5.65)$$

$a_k(0)$ 、 $A_k(0)$ 、 $B_k(0)$ 和 $C_k(0)$ 是初始时刻的 Heisenberg 算符。其中 $\Theta_k = \sqrt{g_k^2 N + \Omega^2}$ 是光场缀饰 Rabi 频率，它表示原子集体激发与外部光场之间的有效耦合。

另一方面，多模量子化电场的正频部分可以写为

$$E^{(+)}(x, t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\epsilon V}} a_k(t) e^{ikx - ikct}, \quad (5.66)$$

其中 $a_k(t)$ 的具体形式可以由公式 (5.63) 和 (5.64) 联立解出：

$$\begin{aligned}a_k(t) &= D_k(t) \cos \theta_k + B_k(t) \sin \theta_k \\ &= [a_k(0) \cos \theta_k - C_k(0) \sin \theta_k] \cos \theta_k \\ &\quad - (\mathbf{O}_1 e^{-it\Theta_k} + \mathbf{O}_2 e^{it\Theta_k}) \sin \theta_k.\end{aligned}\quad (5.67)$$

利用上述公式，可以研究多模量子光场在 EIT 介质中的传播问题。假定介质中的集体态初始时处于基态 $|b\rangle$ ，而光场处于一个多模相干态：

$$|\alpha\rangle = \prod_k \otimes |\alpha_k\rangle, \quad (5.68)$$

其中

$$\alpha_k = \exp[-f^2(k - k_0)^2], \quad (5.69)$$

这表示多模量子光场频率上处于一个高斯分布, $1/f$ 表征频率的宽度, 注意, 在公式 (5.69) 中忽略了一个无关紧要的归一化因子。注意到一个在频率上是高斯分布的光场意味着在空间上的分布也是一个高斯波包, 对于当前考虑的量子光场, 那么它对应的强度 $\langle E^{(-)}(x, t)E^{(-)}(x, t) \rangle$ 应该是一个空间上的高斯波包。考虑到当前的光场态是多模相干态, 所以这样我们仅仅考虑电场的平均 $\langle E^{(+)}(x, t) \rangle$, 在考虑其包络的变化时和考虑它的强度的变化是等价的。将 $a_k(t)$ 的表达式 (5.67) 在态 $|\psi(0)\rangle = |\mathbf{b}\rangle \otimes |\alpha\rangle$ 下求平均得:

$$\begin{aligned}\langle a_k(t) \rangle &= \langle a_k(0) \rangle \cos^2 \theta_k + \sin \theta_k (\langle \mathbf{O}_2 \rangle e^{-it\Theta_k} + \langle \mathbf{O}_1 \rangle e^{it\Theta_k}) \\ &= \langle a_k(0) \rangle (\cos^2 \theta_k + \sin^2 \theta_k \cos \Theta_k t),\end{aligned}\quad (5.70)$$

其中使用了

$$\langle A_k(0) \rangle = \langle C_k(0) \rangle = 0, \quad \langle B_k(0) \rangle = \langle a_k(0) \rangle \sin \theta_k. \quad (5.71)$$

因此 $E^{(+)}(x, t)$ 的平均值可以分解为三部分:

$$\begin{aligned}\langle E^{(+)}(x, t) \rangle &= \sum_k \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon V}} \langle a_k(0) \rangle \times (\cos^2 \theta_k + \sin^2 \theta_k \cos \Theta_k t) e^{i(kx - kct)} \\ &= E_+^{(+)}(x, t) + E_0^{(+)}(x, t) + E_-^{(+)}(x, t),\end{aligned}\quad (5.72)$$

其中

$$\begin{aligned}E_{\pm}^{(+)}(x, t) &= \sum_k \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon V}} \langle a_k(0) \rangle \sin^2 \theta_k e^{i[k(x-ct) \mp \Theta_k t]}, \\ E_0^{(+)}(x, t) &= \sum_k 2\sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon V}} \langle a_k(0) \rangle \cos^2 \theta_k e^{ik(x-ct)}.\end{aligned}\quad (5.73)$$

从上式中可以看到缀饰 Rabi 频率 Θ_k 的出现改变了光场在 EIT 介质中传播时的色散关系。

上述 $\langle E^{(+)}(x, t) \rangle$ 分解后的三部分可以理解成为在坐标空间上的三个波包。对于第一个部分 $E_+^{(+)}(x, t)$, 它的波包中心位置通过求解依赖于波矢的位相的极大值来确定:

$$\frac{\partial}{\partial k} (kct + \Theta_k t - kx)|_{k_0} = 0. \quad (5.74)$$

由此可以求出 $E_+^{(+)}(x, t)$ 波包的群速度为:

$$\begin{aligned}V_{g+} &= \frac{\partial x}{\partial t}|_{k_0} = c + \frac{\partial \Theta_k}{\partial k}|_{k_0} \\ &= c \left(1 + \frac{\Omega}{2k_0 c} \frac{n}{\sqrt{1+n}}\right),\end{aligned}\quad (5.75)$$

其中 $n = \frac{g_{k_0}^2 N}{\Omega^2}$ 。上式是本节的一个重要结果，它表明电场中 $E_+^{(+)}(x, t)$ 部分的包络波包呈现出比真空中的光速 c 还要快的群速度！

我们知道，在经典光学理论中，当光在反常色散介质中传播时，其群速度会出现比光速 c 还要快的所谓超光速。很多实验也观察到了超光速的存在 [123, 124]。因此上述超光速的反直观的结果并不是不可理解的，它仅仅是不同频率成分在介质中的干涉造成的。而且必须指出的是，群速度的超光速是很自然的，这并不会违背因果律。

下面继续考虑其它两部分在介质中的传播。很显然， $E_0^{(+)}(x, t)$ 部分的群速度是 $V_{g_0} = c$ 。而 $E_-^{(+)}(x, t)$ 的群速度为：

$$V_{g_-} = c - \frac{\partial \Theta_k}{\partial k}|_{k_0} = c \left(1 - \frac{\Omega}{2k_0 c} \frac{n}{\sqrt{1+n}}\right). \quad (5.76)$$

一般地，此部分出现慢光的群速度。特殊地，当 $\frac{\Omega}{2k_0 c} \frac{n}{\sqrt{1+n}} > 1$ 时，将会有负群速度的出现。

由此，我们发现在演化过程中，此三部分会以不同的群速度传播。当演化一段时间后，此三部分将会完全分离开，于是可以同时看到有超光、正常光和慢光（甚至负群速度的光）的出现。下面我们进一步分析电场三个部分的解，并给出数值解。

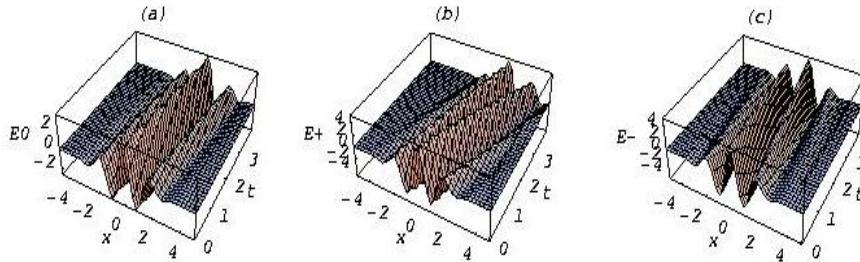


图 5.4：光学波包的三部分的动力学演化（采用归一化坐标）。(a) 正常部分 E_0 ，群速为 $v_{g_0} = c$ ；(b) 超光速部分 E_+ ，群速为 $v_{g+} \approx 1.75c$ ；(c) 慢光部分 E_- ，群速为 $v_{g-} \approx 0.25c$ 。其它系统参量为： $\Omega \sim K_0 c \sim 10^{14}\text{Hz}$ ， $n = g_{k_0}^2 N / \Omega^2 = 3$ 。

考虑到 g_k 的详细表达式为 $g_k = -\wp \sqrt{\frac{kc}{2\hbar\epsilon V}}$ ，为方便起见令

$$g_k^2 N \equiv G^2 k, \quad G = \wp \sqrt{\frac{cN}{2\hbar\epsilon V}}, \quad (5.77)$$

利用 $\langle a_k(0) \rangle = \alpha_k$ 以及用对 k 的积分取代求和, 那么可以得到:

$$E_0^{(+)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int 2L_{me} \sqrt{\frac{ck}{2\epsilon V}} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + G^2 k} \times e^{-f^2(k-k_0)^2} e^{ik(x-ct)} dk, \quad (5.78)$$

以及

$$E_{\pm}^{(+)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int L_{me} \sqrt{\frac{ck}{2\epsilon V}} \frac{G^2 k}{\Omega^2 + G^2 k} \times e^{-f^2(k-k_0)^2} e^{ikx-it(kc \pm \Theta_k)} dk, \quad (5.79)$$

其中, L_{me} 是沿着量子探测光的传播方向 x 方向的原子系统的尺度。严格的计算上述的积分是很困难的, 考虑到光场波矢集中在中心波矢 k_0 的附近, 近似地在中心波矢 k_0 附近展开 \sqrt{k} 、 $\frac{\Omega^2}{\Omega^2+G^2k}$ 、 $\frac{G^2k}{\Omega^2+G^2k}$ 和 Θ_k 到 k 的一阶项, 那么可以解析地得到以下近似结果:

$$\begin{aligned} E_{\pm}^{(+)}(x, t) &\approx Ak_0 J_0 \{2f^2 + iD_0[x - (c \pm E_0)t]\} \\ &\times \exp[-\frac{1}{4f^2}[x - (c \pm E_0)t]^2] e^{ik_0(x-c\pm t)} \end{aligned} \quad (5.80)$$

和

$$E_0^{(+)}(x, t) \approx 2J_0[2f^2 + iF_0(x-ct)] \times \exp[-\frac{1}{4f^2}(x-ct)^2] e^{ik_0(x-ct)}, \quad (5.81)$$

其中

$$\begin{aligned} c_{\pm} &= c \pm \frac{\Omega_0}{k_0}, \quad A = G^2/\Omega^2, \quad \Omega_0 = \Omega \sqrt{1 + Ak_0}, \\ D_0 &= \frac{3 + Ak_0}{2k_0(1 + Ak_0)}, \quad E_0 = \frac{\Omega_0 A}{2(1 + Ak_0)}, \\ F_0 &= \frac{1 - Ak_0}{2k_0(1 + Ak_0)}, \quad J_0 = \frac{L_{me} \sqrt{ck_0/(2\pi\epsilon V)}}{4f^2(1 + Ak_0)}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

从上述公式 (5.80, 5.81) 可以看出, $E_0^{(+)}(x, t)$ 部分的群速度为 $V_{g0} = c$, $E_{\pm}^{(+)}(x, t)$ 部分的群速度为

$$V_{g\pm} = c \pm E_0 = c \left(1 \pm \frac{\Omega}{2k_0 c} \frac{n}{\sqrt{1+n}}\right). \quad (5.83)$$

上述解析的近似结果与前面公式 (5.75) 和 (5.76) 给出的群速度结果是一样的。

基于上述动力学代数方法的理论分析表明, 在我们的 EIT 系统中发现了一些有兴趣的光传播时的性质。当一个光学波包入射到一个基于 EIT 的原子介质中时, 它将分裂成三部分, 每部分分别以超光速、正常光速和慢光速 (或者负光

速) 的群速度传播。一定时间后三个波包将会完全分离, 实验上如能观察到这样三个独立的波包的传播将是很有意义的。需要强调的是, 当前的结果是与一般的稳态理论处理下的结果是不相同的。在稳态理论中, 只能出现一个群速度。其实这两者之间并不矛盾。我们当前考虑的问题是没有考虑原子衰减的理想情况下的暂态解, 此时原子对光场的响应会出现三种情况。人们在研究二能级原子与光场的响应时就曾发现过这一点 [125]。由于没有考虑实际系统中的原子衰减, 所以暂态解只在短时间行为内(相对原子衰减时间而言)有效。而稳态解一般是在考虑到原子衰减时的系统趋于稳定时的结果。

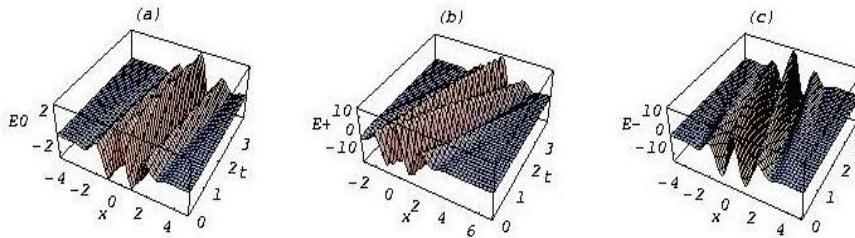


图 5.5: 光学波包的三部分的动力学演化(采用归一化坐标)。(a) 正常部分 E_0 , 群速为 $v_{g0} = c$; (b) 超光速部分 E_+ , 群速为 $v_{g+} \approx 2.36c$; (c) 负光部分 E_- , 群速为 $v_{g-} \approx -0.36c$ 。其它系统参量为: $\Omega \sim K_0 c \approx 10^{14}\text{Hz}$, $n = g_{k_0}^2 N / \Omega^2 \approx 8.3$ 。

下面对光学波包在上述 EIT 介质的传播进行数值模拟, 从公式出发 (5.80, 5.81) 出发来描画光场三部分的波形演化。记光场波包初始时的中心波长为:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi c}{\omega_0}, \quad (5.84)$$

定义:

$$E_i(x, t) = E_i^{(+)}(x, t) + E_i^{(-)}(x, t), \quad (i = 0, \pm). \quad (5.85)$$

如图 5.4 所示, 考虑三部分的包络的运动, 可以发现它们的确有不同的群速度。为方便起见, 对于所有的图都采用了同样的归一化的坐标, 以 $E_0(x, t)$ 的群速度 $v_{g0} = c$ 作为参考, 从图中可以得出 $E_{\pm}(x, t)$ 的群速度分别为 $v_{g+} \approx 1.75c$, $v_{g-} \approx 0.25c$ 。注意到要为了满足近共振条件, 光场的频宽必须很窄, 这说明波包的宽度是很宽的。在下面的图形演示中, 为了更清楚地看到三个波包的分裂现

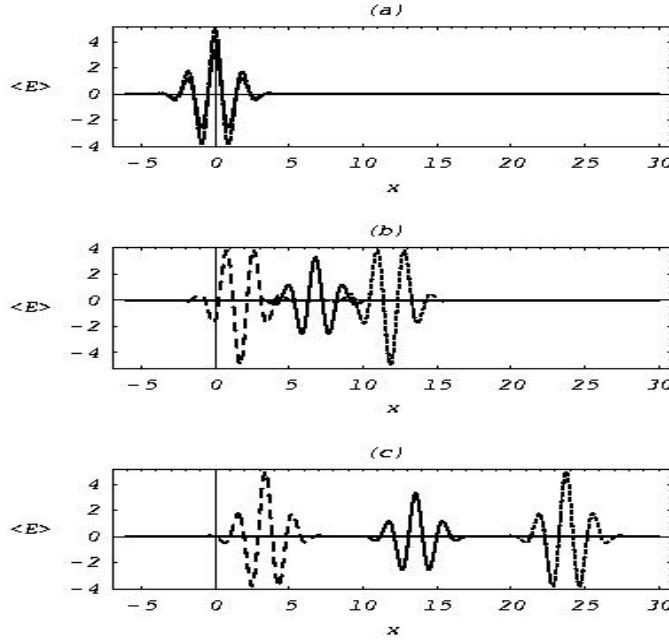


图 5.6: 光学波包的三部分的动力学演化 (采用归一化坐标)。 (a) 初始时刻 $t = 0$ 时波包没有分开时的图形; (b) $t = 20$ 时的波形图; (c) $t = 40$ 时的波形图, 三部分完全分开。正常光、超光和慢光部分分别用实线 (solid line)、点虚线 (dot line) 和划虚线 (dash line) 表示, 系统参数和图 5.4 一样。

象, 我们人为地假定波包包络中仅仅包含少数几个波长, 而不考虑这个要求在实验上是难以满足的。

从群速度的表达式中可以看到第三部分 $E_-(x, t)$ 的群速度为亚光还是负光取决于 $\frac{\Omega}{2k_0c} \frac{n}{\sqrt{1+n}}$ 的值, 当

$$\frac{\Omega}{2k_0c} \frac{n}{\sqrt{1+n}} > 1 \quad (5.86)$$

时, $E_-(x, t)$ 的群速将有: $v_{g-} < 0$ 。图 5.5 给出了存在负群速度的光波包的情况。在如图 5.5 的说明中给定的参数下, 得出的三部分群速度的近似结果为:

$$v_{g0} = c, \quad v_{g+} \approx 2.36c \text{ 和 } v_{g-} \approx -0.36c.$$

我们注意到在不同的参数下, 分裂的波包会有不同的群速度, 其大小值也会不一样。从公式 (5.73) 来看, $E_+(x, t)$ 的包络与 $E_-(x, t)$ 一样 (中心位置不同), 但是与 $E_0(x, t)$ 的包络不一样。 $E_\pm(x, t)$ 与 $E_0(x, t)$ 幅值比例大约为:

$$\frac{\sin^2 \theta_{k_0}}{2 \cos^2 \theta_{k_0}} = \frac{g_{k_0}^2 N}{2\Omega^2} = \frac{n}{2}. \quad (5.87)$$

当 $\frac{n}{2} \ll 1$ 时，光场在 EIT 介质中传播时绝大部分都保持为群速度 c ，反之当 $\frac{n}{2} \gg 1$ 时，光场的绝大部分分为以超光和慢光（负光）群速度传播。为了更清楚地演示这一点，下面给出图 5.4 和图 5.5 相应的在三个不同时刻的二维图形。

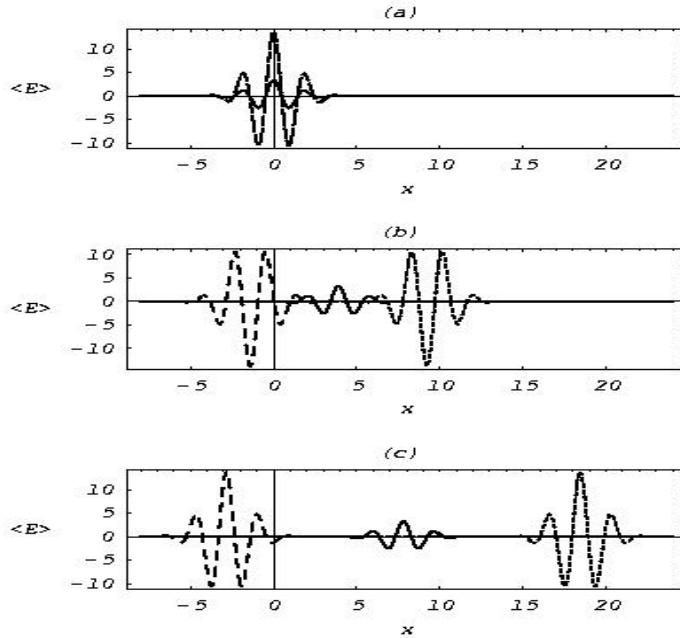


图 5.7: 光学波包的三部分的动力学演化 (采用归一化坐标)。(a) 初始时刻 $t = 0$ 时波包没有分开时的图形; (b) $t = 20$ 时的波形图; (c) $t = 40$ 时的波形图, 三部分完全分开。正常光、超光和负光部分分别用实线 (solid line)、点虚线 (dot line) 和划虚线 (dash line) 表示, 系统参数和图 5.5 一样。

图 5.6 表明了电场的三部分在三个时刻的波形, 参数与图 5.4 一致。从中可以很清楚地看到三部分有不同的群速度。而且, 可以看到在时间演化过程中, $E_+(x, t)$ 和 $E_-(x, t)$ 中的相位形状会出现改变, $E_0(x, t)$ 则不会出现这种情况。这种情况是很好理解的。因为 $E_0(x, t)$ 的群速度和相速度是一样的, 而 $E_+(x, t)$ ($E_-(x, t)$) 的相速度比群速度小(大), 因此, 在时间演化中波形的相位会出现改变。有一点需要指出的是, 严格说来, 上面所有公式的光速 c 应该是光在介质中的速度 [126], 如果介质的折射率为 n_0 , 那么 $c = c_0 n_0$, c_0 为真空中的光速。在这里为了方便起见, 我们假定 $n_0 = 1$, 事实上, 当我们处理的是低温下的原子系综时, 其折射率是趋于 1 的。

图 5.7 表明了存在负光群速传播的波包时的情况, 其参数与图 5.5 是一致

的。此时反直观的负群速的传播可以看得很清楚。

总之，基于动力学群的方法，我们直接从海森堡演化方程出发研究了多模量子光场在三能级 Λ 型 EIT 原子介质中的传播问题。为简便起见，尽管光场是多模的，考虑到频率展宽很窄的光场，我们仍然将其所有模式当做与原子跃迁都共振的情况来处理。在求解的过程中，忽略了边界效应以及原子衰减等等影响，然后在暂态近似下求出的光场各个分裂部分的群速度。

最后，再一次强调具有超光、正常光和亚光（或者负光）群速的波包的同时出现是光的自然性质。这样的一个很有意思的现象希望能够在一些精妙的实验中观察到，也期待能够在实际的光存贮中得到应用。

§5.3 两光子共振 EIT 系统的集体激发

本章前两节详细介绍了原子晶体中单光子完全共振的情况。我们从原子集体激发的角度出发，发现了系统中隐含的半直积 $SU(2) \otimes h_2$ 代数，从而利用谱生成代数构造出了系统的一大类广泛的本征态，进一步研究了在怎样的绝热条件下如何使用这些态中的暗态和与其简并态来进行量子存贮。然后还从多模的角度出发考虑了暂态时量子光的群速与传播。在第二章处理传统 EIT 的半经典方法中提到，当探测光和控制光满足两光子共振（不要求满足单光子共振）时，仍然会出现 EIT 现象。那么一个自然而然的问题是，在我们的原子集体激发模型中，当两光子共振条件得到满足时，是否也会出现类似的 EIT 现象。此外，相对于单光子情况，此时系统的态又是什么形式，在怎样的绝热条件下是否还能用来实行量子存贮。本节将参照详细我们自己的文献 [127, 128] 介绍我们关于这些问题的讨论。

考虑以下模型：原子系综由 N 个三能级 Λ 型构成，其原子能级分别记为：激发态 $|a\rangle$ ，基态 $|b\rangle$ 和居中的亚稳态 $|c\rangle$ 。所有原子都等同地与一个量子探测光场和一个经典控制光场耦合（见图 5.8）。其中，原子的 $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$ 跃迁（能级差为 $\omega_{ab} = \omega_a - \omega_b$ ）与量子探测光（频率为 ω ，耦合常数为 g ）耦合，失谐量为 $\Delta_p = \omega - \omega_{ab}$ ；原子的 $|a\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ 跃迁（能级差为 $\omega_{ac} = \omega_a - \omega_c$ ）与经典控制光场耦合（频率为 ν ，耦合系数即 Rabi 频率为 Ω ），失谐量为 $\Delta_c = \nu - \omega_{ac}$ 。

那么在相互作用表象下，系统的相互作用哈密顿量写为 ($\hbar = 1$)

$$H_I = -\Delta_p S + (g\sqrt{N}aA^\dagger + e^{i(\Delta_p - \Delta_c)t}\Omega T_+ + h.c.), \quad (5.88)$$

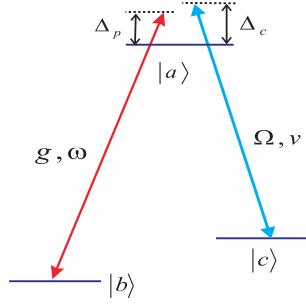


图 5.8: 三能级 Λ 型原子与经典控制场和量子探测场耦合示意图，其耦合的失谐分别为 Δ_c 和 Δ_p 。当 $\Delta_p=\Delta_c$ 时，系统满足两光子共振条件。

其中原子的集体算符定义为：

$$S = \sum_{j=1}^N \sigma_{aa}^{(j)}, \quad A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sigma_{ab}^{(j)}, \quad T_+ = \sum_{j=1}^N \sigma_{ac}^{(j)}. \quad (5.89)$$

其中 $\sigma_{\mu\nu}^{(j)} = |\mu\rangle_{jj}\langle\nu|$ 表示第 j 个原子的态 $|\nu\rangle$ 向 $|\mu\rangle$ 态 ($\mu, \nu = a, b, c$) 跃迁的反转算符。 a^\dagger 和 a 分别是量子探测光场的产生、湮没算符。需要指出的是，本章所研究的系统虽然是自由原子系综，但是由于忽略了原子的空间运动，因此理论上来讲，固定了空间运动的原子晶格系统的处理也是同样的。因为对于空间位置保持不变的原子，其内态总是可以包含一个与时间无关的常数位相因子，所以光场与系综中原子的耦合系数中与空间相关的常数相因子在哈密顿量 (5.88) 中就省略了。

从 (5.88) 式中可看出，当 $\Delta_p=\Delta_c$ ，也就是满足所谓的两光子共振条件时，相互作用哈密顿量是不含时的。注意到上述哈密顿量中原子部分由集体激发算符 S 、 A 、 A^\dagger 、 $T_- = (T_+)^\dagger$ 和 T_+ 构成。为了更好地描述与两个外部光场耦合的原子系综的集体运动，我们先研究由 A 、 A^\dagger 、 T_- 和 T_+ 等算符构造而成的封闭代数结构。为此，必须引入

$$T_3 = \sum_{j=1}^N (\sigma_{aa}^{(j)} - \sigma_{cc}^{(j)}) / 2, \quad (5.90)$$

它和 T_- 和 T_+ 的对易关系为

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm, \quad (5.91)$$

它们刚好构成一个 $SU(2)$ 的代数结构。此外，引入一个新的集体算符 C ：

$$C = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sigma_{bc}^{(j)}, \quad C^\dagger = (C)^\dagger, \quad (5.92)$$

很容易证明在大 N 极限和低激发条件下, 上述定义的原子激发的集体算符 A 和 C 是两个独立的玻色子算符:

$$[A, A^\dagger] = 1, \quad [C, C^\dagger] = 1, \quad [A, C^\dagger] = 0. \quad (5.93)$$

根据以下对易关系:

$$[T_-, C^\dagger] = 0, \quad [T_+, C^\dagger] = A^\dagger, \quad (5.94)$$

$$[T_+, A^\dagger] = 0, \quad [T_-, A^\dagger] = C^\dagger \quad (5.95)$$

可以看出, 由 T_\pm 和 T_3 构成的 $SU(2)$ 的代数与由 A 、 A^\dagger 、 C 、 C^\dagger 和 $\mathbf{1}$ 构成的 Heisenberg-Weyl 代数 h_2 组成了一个更大的半直积的代数结构: $SU(2) \overline{\otimes} h_2$ 。

至此, 我们发现, 尽管当前的满足两光子共振的模型是自由原子系综, 但是它仍然拥有与满足单光子共振的原子晶体系统中类似的半直积代数结构。从定义了集体算符之后哈密顿量的形式来看, 当前的模型中仅仅多了一项: $-\Delta_p S$, 那么自然地会提出这样的问题: 由于该项的存在, 满足两光子共振条件下的系统还满足 EIT 吗? 系统还存在类似的暗态吗? 系统的本征态和本征谱又会是怎样呢? 该系统还能在绝热操纵下完成类似的量子存储吗? 以下我们一一来讨论这些问题。

下面先讨论两光子共振情况下探测光场在原子系综中传播时的色散关系。由此来考虑两光子共振下系统是否还满足电磁诱导透明的条件。

从含时哈密顿量 (5.88) 出发, 利用大 N 极限和低激发条件下上述动力学代数的对易关系以及

$$[S, C^\dagger] = 0, \quad [A, S] = A, \quad (5.96)$$

可得以下有关算符 A 、 C 的 Heisenberg 方程

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -(\Gamma_A - i\Delta_p)A - ig\sqrt{N}a \\ &\quad - ie^{i(\Delta_p - \Delta_c)t}\Omega C + f_A(t), \\ \dot{C} &= -\Gamma_C C - ie^{-i(\Delta_p - \Delta_c)t}\Omega A + f_C(t), \end{aligned} \quad (5.97)$$

其中唯象地引入了原子态 $|a\rangle$ 和 $|c\rangle$ 的衰减率 Γ_A 和 Γ_C ; $f_A(t)$ 和 $f_C(t)$ 分别是 A 、 C 的量子涨落算符, 它们有以下关系:

$$\langle f_\alpha(t)f_\alpha(t') \rangle \neq 0, \quad (5.98)$$

$$\langle f_\alpha(t) \rangle = 0, \quad (\alpha = A, C). \quad (5.99)$$

下面来求解上述方程的稳态解。首先，引入一个变换

$$C = \tilde{C}e^{-i(\Delta_p - \Delta_c)t}, \quad (5.100)$$

上述方程简化为

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -(\Gamma_A - i\Delta_p)A - ig\sqrt{N}a - i\Omega\tilde{C} + f_A(t), \\ \dot{\tilde{C}} &= -\Gamma_C\tilde{C} + i(\Delta_p - \Delta_c)\tilde{C} - i\Omega A + f_C(t), \end{aligned} \quad (5.101)$$

通过对两式取平均并令 $\langle \dot{A} \rangle = \langle \dot{\tilde{C}} \rangle = 0$ ，可得

$$\begin{aligned} 0 &= -(\Gamma_A - i\Delta_p)\langle A \rangle - ig\sqrt{N}\langle a \rangle - i\Omega\langle \tilde{C} \rangle, \\ 0 &= -\Gamma_C\langle \tilde{C} \rangle + i(\Delta_p - \Delta_c)\langle \tilde{C} \rangle - i\Omega\langle A \rangle, \end{aligned} \quad (5.102)$$

这样可以得到

$$\langle A \rangle = \frac{-ig\sqrt{N}[\Gamma_C - i(\Delta_p - \Delta_c)]\langle a \rangle}{(\Gamma_A - i\Delta_p)[\Gamma_C - i(\Delta_p - \Delta_c)] + \Omega^2}. \quad (5.103)$$

另一方面，单模量子探测光场可记为

$$E(t) = \varepsilon e^{-i\omega t} + h.c. \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2V\epsilon_0}}ae^{-i\omega t} + h.c., \quad (5.104)$$

其中 V 光场的有效模体积，为方便起见取为与相互作用的原子系综体积相等。

光场所相应的极化可记为

$$\langle P \rangle = \langle p \rangle e^{-i\omega t} + h.c. \equiv \epsilon_0\chi\langle \varepsilon \rangle e^{-i\omega t} + h.c., \quad (5.105)$$

其中 $\chi = \langle p \rangle / (\langle \varepsilon \rangle \epsilon_0)$ 是极化率。记 μ 为态 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 之间的偶极矩，那么系统的平均极化为

$$\langle p \rangle = \mu \left\langle \sum_{j=1}^N \sigma_{ba}^{(j)} \right\rangle / V = \frac{\mu\sqrt{N}}{V} \langle A \rangle, \quad (5.106)$$

根据量子光场与原子耦合系数 g 的具体形式： $g = -\mu\sqrt{\frac{\omega}{2V\epsilon_0}}$ ，可得极化率的表达式为：

$$\chi = \frac{2ig^2N(\Gamma_C - i(\Delta_p - \Delta_c))}{\omega[(\Gamma_A - i\Delta_p)(\Gamma_C - i(\Delta_p - \Delta_c)) + \Omega^2]}. \quad (5.107)$$

很显然，上述的极化率是复的，记 χ_1 和 χ_2 分别为 χ 的实部和虚部： $\chi = \chi_1 + i\chi_2$ 。其精确形式为

$$\chi_1 = \frac{[(\Delta_p - \Delta_c)\Theta - \Gamma_C\Xi]F}{\Theta^2 + \Xi^2}, \quad (5.108)$$

$$\chi_2 = \frac{[\Gamma_C\Theta + (\Delta_p - \Delta_c)\Xi]F}{\Theta^2 + \Xi^2}, \quad (5.109)$$

其中,

$$\begin{aligned}\Theta &= \Gamma_A \Gamma_C - \Delta_p (\Delta_p - \Delta_c) + \Omega^2, \\ \Xi &= \Delta_p \Gamma_A + \Gamma_A (\Delta_p - \Delta_c), \quad F = 2g^2 N / \omega\end{aligned}$$

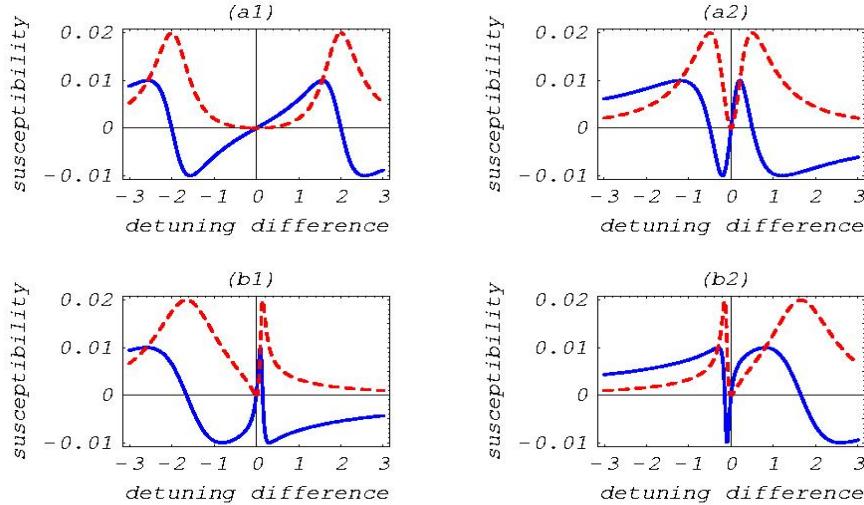


图 5.9: 极化率的实部 (实线) 和虚部 (虚线) 对归一化的两光子失谐 $\Delta (= \Delta_p - \Delta_c)$ 的依赖关系。其参数分别为: (a1) $\Omega = 2$, $\Delta_c = 0$; (a2) $\Omega = 1/2$, $\Delta_c = 0$; (b1,b2) $\Omega = 1/2$, $\Delta_c = \pm 1.5$ 。 (其余给定的系统参数为: $\Gamma_A = 1$, $\Gamma_C = 10^{-4}$, $g\sqrt{N} = 100$ 以及 $\omega_{ab} = 10^6$)。

因为极化率的实部和虚部分别与色散和吸收相关联。图 5.9 给出了 χ_1 和 χ_2 与两光子失谐 $\Delta (= \Delta_p - \Delta_c)$ 的函数关系。从图 5.9 的四个图中, 可以看到在 $\Delta = 0$ 附近, $\chi_1 \rightarrow 0$, $\chi_2 \rightarrow 0$ 。这意味着只要满足两光子共振的条件, 尽管单光子失谐不为零, 系统仍然具有电磁诱导透明现象。我们称这种现象为两光子共振 EIT。

图 5.9 还表明了极化率对于控制场的强度 (Rabi 频率) 的依赖。从图 5.9(a1, a2) 来看, 控制光越强, 其诱导的透明窗口就越宽。当然, 所诱导的窗口宽度还取决于系统的其它许多参量。比方在其它条件相同时, 单光子失谐量的增加也会导致窗口变宽, 这点可从图 5.9(a2, b1, b2) 看出。同时我们注意到单光子失谐量不为零时, 在 $\Delta = 0$ 附近两边不对称, 与单光子失谐量为零时的情况比较会出现一些变形。由此, 窗口的严格定义将变得比较复杂, 这里只是形象地从图形中来说明这些性质, 而没有给出严格的定量结果。

下面详细计算量子探测光在该系综中的传播，主要也就是计算出人们最为关心的探测光群速度。一般地，光在介质中传播时的折射指数为复量：

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)} = \sqrt{1 + \chi}, \quad (5.110)$$

它的实部和虚部分别为：

$$n_1 = \sqrt{\frac{[(1 + \chi_1)^2 + \chi_2^2]^{1/2} + (1 + \chi_1)}{2}}, \quad (5.111)$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{[(1 + \chi_1)^2 + \chi_2^2]^{1/2} - (1 + \chi_1)}{2}} sgn(\chi_2), \quad (5.112)$$

其中 $sgn(\chi_2)$ 是符号函数： $sgn(\chi_2) = +1 (-1)$ 当 $\chi_2 > 0 (< 0)$ 。实部 n_1 表示介质的折射程度，虚部 n_2 表示介质的吸收系数。

求出了光在介质中的极化率后，根据群速的计算公式：

$$v_g(\omega) = \frac{c}{Re[n + \omega dn/d\omega]} = \frac{c}{n_1 + \omega \frac{dn_1}{d\omega}}, \quad (5.113)$$

(其中 c 是真空中的光速) 可以直接求出探测光在此原子系综介质中任意频率 ω 时的群速 $v_g(\omega)$ 。

下面详细讨论当满足两光子共振条件下时探测光的群速 v_g (如无特殊说明，下面出现的探测光群速都是指满足两光子共振下的群速)。此时 χ_1 和 χ_2 都近似为零，我们可以作以下近似：

$$n_1 \simeq 1 + \chi_1/2 \rightarrow 1, \quad n_2 \simeq \chi_2 \rightarrow 0, \quad (5.114)$$

那么群速的表达式为：

$$v_g = \frac{c}{n_1 + \omega \frac{dn_1}{d\omega}|_{\Delta_p=\Delta_c}} = \frac{c}{1 + \frac{\omega}{2} \frac{d\chi_1}{d\omega}|_{\Delta_p=\Delta_c}}. \quad (5.115)$$

需要指出的是，求解两光子共振时的群速也可以直接从方程 (5.113) 出发进行求解而不需要从简化的公式 (5.115) 出发。此外需要注意的是在计算 $\frac{d\chi_1}{d\omega}$ 时，其中 $\Delta_p (= \omega - \omega_{ab})$ 是 ω 的函数。

以下给出公式 (5.115) 的数值解。如果我们给定系统中下列参数在本节的计算中保持不变： $\Gamma_A = 1$, $\Gamma_C = 0.01$, $\omega_{ab} = 10^6$ (已经归一化)，那么群速 v_g 依赖于 Δ_c 、 Ω 和 $g\sqrt{N}$ 。

图 5.10(a) 表示两光子失谐时的 v_g 对于控制场 Rabi 频率 Ω 的依赖 (给定单光子失谐为 $\Delta_c = 5$)。其中实线 (虚线) 相应的参数为 $g\sqrt{N} = 100$ (80)。我们可以看到当 $\Omega \gg g\sqrt{N}$ 时, $v_g \sim c$, 当 $\Omega \ll g\sqrt{N}$ 时, $v_g \sim 0$ 。这两个极限下的趋近结果与 $g\sqrt{N}$ 的值无关。注意到虽然所用方法不同, 但这个趋近结果与 Fleischhauer 等人 [38, 39, 129] 处理单光子失谐时的结果是一致的。

这就意味着可以利用这个结果来实现探测光的存储与提取。首先, 当探测光刚刚进入介质中时, 控制场的强度取为很大, 即有 $\Omega \gg g\sqrt{N}$ 。然后, 绝热地改变控制场强度 Ω 直至 $\Omega \ll g\sqrt{N}$, 那么探测光的群速将趋近于 0, 也就是说, 探测光被存储于原子介质中了。反之, 再绝热地将 Rabi 频率调大到 $\Omega \gg g\sqrt{N}$ 时, 其群速将恢复到初始时的速度 c , 从而实现了探测光的提取。

图 5.10(b) 给出了两光子失谐时群速度 v_g 对单光子失谐 Δ_c 的依赖关系。当 $\Omega \sim g\sqrt{N}$ 或者 $\Omega \gg g\sqrt{N}$ 时, 这时群速与 c 大致一个数量级, 其对于单光子失谐基本上常数依赖关系, 见图 5.10(b) 中的点划线 ($\Omega=2g\sqrt{N} = 200$) 和点线 ($\Omega=g\sqrt{N}/2 = 200$)。Fleischhauer 等人 [39] 给出了单光子共振时的群速结果: $v_g = \frac{c}{1+g^2N/\Omega^2}$ 。虽然所用的方法不尽相同, 但是当取单光子失谐 Δ_c 为零时我们的结果应该自动简化为 Fleischhauer 的计算结果 [39]。取图 5.10(b) 中点划线的情况 ($\Omega=2g\sqrt{N} = 200$) 下的群速。我们给出的结果是 $v_g = 0.8001c$, 而根据他们的公式给出的结果为 $v_g = \frac{c}{1+g^2N/\Omega^2} = 0.8c$ 。两者结果很相似。

此外, 图 5.10(b) 中的两条弯曲的曲线 (实线和虚线) 表示当 $\Omega \ll g\sqrt{N}$ 时群速对单光子失谐的函数关系。此时, 探测光的群速是极慢的。它们对单光子失谐的依赖关系变得比较明显。在单光子完全共振下群速有一个最小值。这与最近的一个实验 [130] 给出的无缓冲气体下原子系综中探测光的群速的图形是相似的。

图 5.10 也表明了群速度对原子系综密度的依赖。需要指出的是, 在当前的工作中, 密度与原子总数 N 正比 (给定其它条件不变)。图 5.10(a) 中的两条线 (相应参数分别为 $g\sqrt{N} = 100$ 和 $g\sqrt{N} = 80$) 表明了不同密度时群速对 Rabi 频率的函数关系。这说明, 当密度越高时, 同样条件下的群速将越小。图 5.10(b) 中的实线和虚线 (相应参数分别为 $g\sqrt{N} = 100$ 和 $g\sqrt{N} = 100$) 的对比也同样说明了这一点。上述关于密度的关系与实验 [130] 中给出的两光子共振下群速对密度的关系是类似的。

通过上边的数值计算并和其它理论工作相比较的一致性, 说明我们当前的方法是强大而有效的。注意到有些关于 Λ 型原子与光场作用的工作中其群速会出现超光甚至负的群速度。这主要是由于其采用的系统不同于当前所考虑

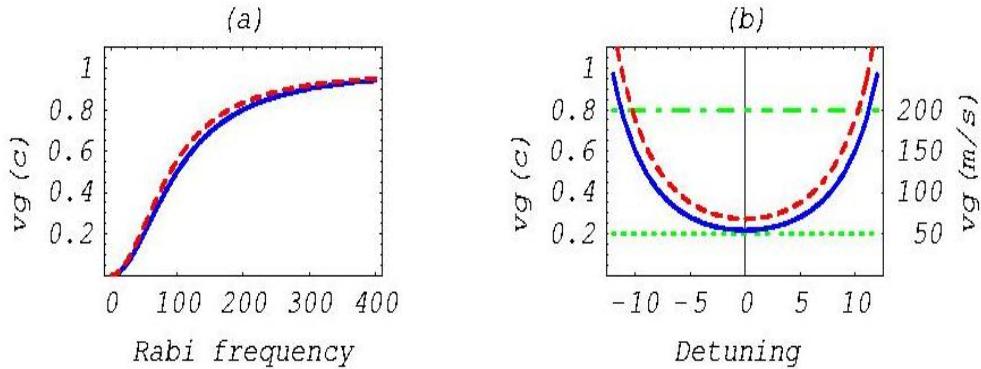


图 5.10: 探测光的群速度。 (a) 横坐标为 Rabi 频率 Ω ，其中 $\Delta_c = 500$ ， $g\sqrt{N} = 100\Gamma_A$ (实线) 或者 $g\sqrt{N} = 80\Gamma_A$ (虚线)。(b) 横坐标为单光子失谐 Δ_c 。其中点划线对应参数 $\Omega = 2g\sqrt{N} = 200\Gamma_A$ ，点线对应 $\Omega = g\sqrt{N}/2 = 50\Gamma_A$ ；实线对应 $\Omega = 0.04\Gamma_A$ 和 $g\sqrt{N} = 100\Gamma_A$ ，虚线 (dashed line) 对应 $\Omega = 0.04\Gamma_A$ 和 $g\sqrt{N} = 80\Gamma_A$ 。点划线和点线对应于左边的纵坐标轴，实线和虚线对应于右边的纵坐标轴。其它系统参数为： $\Gamma_A = 10^4\Gamma_C = 1$ ， $\omega_{ab} = 10^6$ 。所有频率参数都已经归一化。

的两光子共振 EIT 系统。文献 [131] 考虑的是 Λ 型三能级原子与三个光场的相互作用，文献 [131] 则是考虑 Λ 型三能级原子与两光场相互左右的相干布居捕获。但是，最近的一个工作 [71] 也是关于基于 Λ 型原子的 EIT 系统，其中考虑了原子的空间，结果表明有负群速的出现。相比之下，我们当前的工作忽略了原子的空间运动（包括忽略了 Doppler 展宽），在上述的数值结果中没有发现负群速的出现。我们猜想这是因为没有考虑原子空间运动所导致的。

总之，基于动力学代数的方法，我们给出了量子探测场在两光子共振 EIT 情况下的 Λ 原子系综介质中传播问题。所计算的群速度结果和实验上给出的一些结果类似 [130]。当前的分析忽略了原子空间运动的影响，相应地缓冲气体的影响以及多普勒效应的影响都忽略了。因为从理论上讲，当温度足够低的时候，这些影响都可以当做微扰来看待。本论文暂时不考虑这些影响。

本节上面的内容讨论了当原子集体激发存在衰减时的稳定解，从而求出了量子探测光在原子系综中传播的群速。我们发现，的确在某些条件下，其群速将变得很慢甚至趋近于 0，因而能够实现光在原子系统中的存贮。下面将从原子系统与光场整个系统的态的观点来考虑这个问题，即能否利用这样一个两光子共振的 EIT 系统来实现量子态在量子光场态和原子集体激发态的转换。

我们的系统仍然是前面给出的两光子共振下的 EIT 系统。为表示方便，再次给出了示意图（图 5.11）。那么此时系统在相互作用表象下的相互作用哈密顿量为 ($\hbar = 1$)

$$H_I = \Delta_c S + (g\sqrt{N}aA^\dagger + \Omega T_+ + h.c.), \quad (5.116)$$

其中 S ， A ， A^\dagger ，和 T_\pm 仍然是如前面定义的集体激发算符。 $\Delta_c = \omega_{ac} - \nu$ 是控制光的失谐（注意与前面的定义差一负号，这并不影响下面的任何结论），其余参数的含义与本节先前的含义一致。

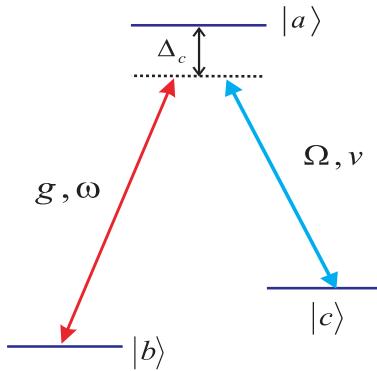


图 5.11: 三能级 Λ 型原子与经典控制场和量子探测场耦合。系统具有相等的单光子失谐 Δ_c ，也就是说，满足两光子共振 EIT。

同样地通过引入原子集体激发算符

$$C = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sigma_{bc}^{(j)}, \quad C^\dagger = (C)^\dagger, \quad (5.117)$$

可以发现在大 N 极限和低激发条件下，系统算符就有一个封闭的半直积代数结构： $SU(2)\overline{\otimes} h_2$ ，其中， $SU(2)$ 代数的生成元是 T_\pm 和 T_3 ， h_2 代数的生成元是 A ， A^\dagger ， C ， C^\dagger 和单位元 1 。这个代数结构和第五章 5.1 节中单光子共振下的代数结构是类似的。可以参照那里的方法来进行以下研究。

首先，类似地定义暗态极化子算符：

$$D = a \cos \theta - C \sin \theta, \quad (5.118)$$

其中 $\theta(t)$ 满足

$$\tan \theta(t) = \frac{g\sqrt{N}}{\Omega(t)}. \quad (5.119)$$

同样，在大 N 极限和低激发条件下 D 是个玻色算符：

$$[D, D^\dagger] = 1. \quad (5.120)$$

记系统的基态为： $|0\rangle = |0\rangle_p \otimes |b^N\rangle$ ，其中 $|0\rangle_p$ 是光场的真空态， $|b^N\rangle = |b_1 b_2 \dots b_N\rangle$ 表示所有 N 原子都呆在其内部能级的基态。利用以下关系

$$H_I |0\rangle = 0, \quad [D, H_I] = 0, \quad (5.121)$$

可以构造出一系列系统的本征态：

$$|d_n\rangle = [n!]^{-1/2} D^{\dagger n} |0\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.122)$$

利用方程 (5.118)，可以将 $|d_n\rangle$ 扩写为：

$$\begin{aligned} |d_n\rangle &= \sum_{m=0}^n (-1)^m \sqrt{\frac{n!}{m!(n-m)!}} \cos^{n-m} \theta \sin^m \theta \\ &\times |\mathbf{c}^m\rangle \otimes |n-m\rangle_p, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.123)$$

其中

$$|\mathbf{c}^m\rangle = [m!]^{-1/2} C^{\dagger m} |b^N\rangle \quad (5.124)$$

表示原子系综中有 m 个 C 模式的集体激发。图 5.12 中表示了能级示意图，缀饰本征态 $|d_n\rangle$ 刚好是虚线圈内的项 $|b^N\rangle \otimes |n\rangle_p$ 、 $|\mathbf{c}\rangle \otimes |n-1\rangle_p$ 、 \dots 、 $|\mathbf{c}^n\rangle \otimes |0\rangle_p$ 的线性叠加。注意到现在的考虑中忽略了原子的所有衰减。一般地，原子激发态 $|a\rangle$ 的衰减率比亚稳态 $|c\rangle$ 的衰减率要大的多。但是由于上述的缀饰态仅仅包含有单原子的基态 $|b\rangle$ 和亚稳态 $|c\rangle$ ，所以即使在考虑实际中的原子衰减的时候，上述缀饰态仍然是稳定的。

上述虚线圈内的系统的本征缀饰态，而且不含有原子激发态 $|a\rangle$ ，并且在相互作用哈密顿量的作用下为零，因此一般称为暗态，相应地 D 称为暗态极化子算符。根据单光子共振 EIT 系统的讨论，类似地，当前的双光子共振 EIT 系统应该还存在着不同于暗态的其它本征态。下面通过谱生成代数 [119] 来求解。

首先，引入类似的所谓亮态极化子：

$$B = a \sin \theta + C \cos \theta, \quad (5.125)$$

在大 N 极限和低激发条件下，它满足以下对易关系：

$$[B, B^\dagger] = 1, \quad [D, B^\dagger] = [D, B] = 0, \quad (5.126)$$

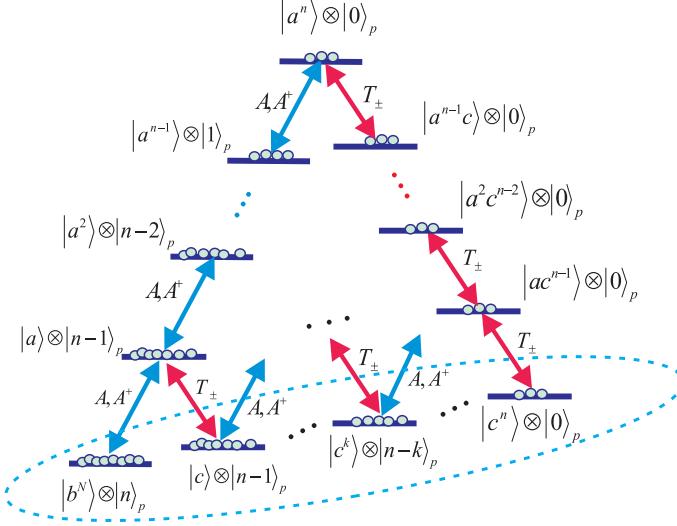


图 5.12: 原子集体激发的两光子共振 EIT 的集体态的示意图。其中 $|\mathbf{a}^l \mathbf{c}^m\rangle = [l! m!]^{-1/2} A^{\dagger l} C^{\dagger m} |b^N\rangle$ 表示原子系综中有 l 个 A 模式、 m 个 C 模式的集体激发。图中的态通过 A 、 A^\dagger 和 T_\pm (以及相应的光场作用) 的作用联系起来。暗态 $|d_n\rangle$ 是由虚线圈中的态叠加而成。

这说明 B 、 D 是两个独立的玻色算符。利用这些关系以及 $[A, B] = [A, B^\dagger] = 0$ ，可得

$$[H_I, B^\dagger] = \varepsilon A^\dagger, \quad [H_I, A^\dagger] = \Delta_c A^\dagger + \varepsilon B^\dagger, \quad (5.127)$$

其中， $\varepsilon = \sqrt{g^2 N + \Omega^2}$ 。引入以下变换：

$$Q_\pm = \sqrt{\frac{\Theta \pm \Delta_c}{2\Theta}} A \pm \sqrt{\frac{\Theta \mp \Delta_c}{2\Theta}} B, \quad (5.128)$$

其中

$$\Theta = \sqrt{\Delta_c^2 + 4\varepsilon^2}. \quad (5.129)$$

那么可得以下关系：

$$[H_I, Q_\pm^\dagger] = e_\pm Q_\pm^\dagger, \quad (5.130)$$

其中

$$e_\pm = \pm \sqrt{\frac{\Theta \pm \Delta_c}{\Theta \mp \Delta_c}} \varepsilon. \quad (5.131)$$

我们发现，引入上述正交变化后，可以得到和完全共振时形式类似的关系式。因此，类似地可以利用谱生成代数方法 [119] 构造出整个系统的本征缀饰态

$$|e(m, k; n)\rangle = [m! k!]^{-1/2} Q_+^{\dagger m} Q_-^{\dagger k} |d_n\rangle, \quad (5.132)$$

相应的本征值为

$$E(m, k) = me_+ - ke_-, \quad (m, k = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.133)$$

以上求出了系统的缀饰本征态，那么在考虑在绝热操纵经典光场的 Rabi 频率 $\Omega(t)$ 的情况下利用暗态 $|d_n\rangle$ 来作为量子存贮的可行性。这就意味着需要考虑暗态或者暗态的叠加态在怎样的绝热条件下不会向其它态跃迁。根据绝热条件 [120, 121] 的公式，必须满足：

$$\left| \frac{\langle e(m, k; n) | \partial_t | d_l \rangle}{E(m, k) - 0} \right| \ll 1, \quad (m, k, n, l = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.134)$$

上式的分母中出现的本征值在随着 Rabi 频率 Ω 的改变而变化，甚至可能与暗态的本征值 0 出现交叉。幸运的是，详细的计算表明：在所有 $\langle e(m, k; n) | \partial_t | d_l \rangle$ 的项中，仅仅 $\langle e(0, 1; l-1) | \partial_t | d_l \rangle$ 和 $\langle e(1, 0; l-1) | \partial_t | d_l \rangle$ 不为零。具体的计算见附录二。最终得到的绝热条件为：

$$\frac{g\sqrt{N}(\Theta + |\Delta_c|)}{\sqrt{\Theta(\Theta - |\Delta_c|)\varepsilon^3}} |\dot{\Omega}| \ll 1. \quad (5.135)$$

当 $\Delta_c = 0$ 时，上述方程 (5.135) 简化为：

$$g\sqrt{N}|\dot{\Omega}|/\varepsilon^3 \ll 1, \quad (5.136)$$

这正是在文献 [118] 中给出的单光子共振时的绝热条件。根据方程 (??) 条件，可以知道在绝热条件下，暗态 $|d_l\rangle$ 不会与暗态空间外的其它态 $|e(m, k; n)\rangle$ 混合，也不会与其它的暗态 $|d_{l'}\rangle$ ($l' \neq l$) 混合（这一点类似于单光子共振时简并态间混合的讨论，可以从附录中的公式 (B.6) 中看出）。这表明，如果初态为暗态的叠加态：

$$|\Phi(0)\rangle = \sum_n c_n(0) |d_n(0)\rangle, \quad (5.137)$$

在以后的绝热演化下，系统的态将为：

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_n c_n(0) |d_n(t)\rangle \quad (5.138)$$

由此，可以实现量子信息在光子类型和原子集体激发类型之间的转换，从而实现了光量子信息在原子系综中的存贮和提取。图 5.13 表示了在 $a-C$ 平面上的暗态极化子算符 $D(t)$ 。因为暗态是由暗态极化子算符所用在系统基态上产生的：

$$|d_n(t)\rangle = [n!]^{-1/2} D^{\dagger n}(t) |0\rangle, \quad (5.139)$$

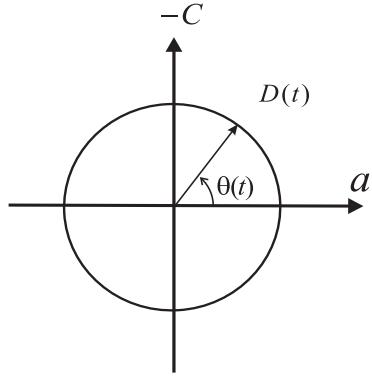


图 5.13: 暗态极化子算符 $D = a \cos \theta - C \sin \theta$ 依赖于参数 $\theta(t) = \arctan \frac{a\sqrt{N}}{\Omega(t)}$ 。初始时刻 $\theta(t_0) = 0$, $D(t_0) = a$, 总系统为 $|\psi(t_0)\rangle = |b^N\rangle \otimes |n\rangle_p$; 当 θ 绝热地改变为 $\theta(t_1) = \pi/2$ 时, 则有 $D(t_1) = -C$, 总系统的态为 $|\psi(t_1)\rangle = |c^n\rangle \otimes |0\rangle_p$ 。

那么绝热地调节 $\Omega(0)$ 的值, 使得 $\theta(t)$ 缓慢地从 $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 那么暗态极化子算符变化为 $D(t)$: $a \rightarrow -C$, 暗态 $|d_n(t)\rangle$ 将从态 $|b^N\rangle \otimes |n\rangle_p$ 变化到 $|c^n\rangle \otimes |0\rangle_p$ 。最一般地, 如果单模量子场的初始态由下面的密度矩阵来描述:

$$\rho_p = \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle_{pp} \langle m|, \quad (5.140)$$

那么经过上述的转换过程后将会产生一个集体激发类型的态:

$$|b^N\rangle \langle b^N| \otimes \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle_{pp} \langle m| \rightarrow \sum_{n,m} (-1)^{n+m} \rho_{nm} |\mathbf{c}^n\rangle \langle \mathbf{c}^m| \otimes |0\rangle_{pp} \langle 0|. \quad (5.141)$$

如果再加以一个相反的绝热操纵过程使得 $\theta: \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$, 那么量子态的信息又将从集体激发的类型重新回到初始时的量子光场的类型:

$$\sum_{n,m} (-1)^{n+m} \rho_{nm} |\mathbf{c}^n\rangle \langle \mathbf{c}^m| \otimes |0\rangle_{pp} \langle 0| \rightarrow |b^N\rangle \langle b^N| \otimes \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle_{pp} \langle m|. \quad (5.142)$$

这样, 量子信息在量子光场类型与原子集体激发类型之间就可以绝热地相互转换。那样的两个过程就完成了量子信息的“写入”过程和“读出”过程, 从而实现了光量子信息在原子系综中的存贮。

总之, 我们研究了两光子共振 EIT 的情况下原子集体激发—光场系统的本征态和相应的能谱结构, 发现这样的系统仍然存在所谓的暗态和暗态极化子。并且给出了精确的系统参数的绝热控制条件, 使得在此绝热演化下, 暗态空间可以用来完成量子信息的存贮。当前的研究使原来的原子系综 EIT 的完全共振条件

得到了很大的推广：EIT 现象的产生只需要满足两光子共振的条件而不需要满足单光子共振条件的严格限制，而且表明了两光子共振 EIT 时系统同等可以用来存贮光量子信息。

§5.4 小结与讨论

本章主要介绍了我们关于三能级 Λ 型原子系综 EIT 现象的一些新的研究和推广。在 Fleischhauer 等人研究原子系综 EIT 现象中所用的集体激发的基础上，我们明确指出在大 N 极限和低激发条件下原子集体激发可以看作是一个满足玻色关系的激子算符。以此出发，研究了将三能级 Λ 型原子固定在晶格上的电磁诱导透明机制，这样的目的是可以避免原子系综中原子空间运动所带来的退相干影响。利用对于集体激发的玻色化处理方法，我们发现了该系统的隐藏对称性以及系统集体激发的能谱结构，这是 Fleischhauer 等人所没有发现的。我们严格证明了在怎样的绝热条件下可以利用此系统来进行探测光场的量子存贮。

进而在第二节我们讨论了多模量子光场在固定了原子空间位置的系统，通过对系统的隐藏对称性的研究，详细研究了多模探测量子光场在原子系综中的暂态传播问题，发现探测光场在传播过程中会分裂成三部分，分别以正常光速、超光速和慢光速（或者负光速）的群速度传播。然后在第三节将上述方法推广到了一般情况下的两光子共振时的三能级 Λ 型原子系综 EIT 情况，并讨论了此时该系统的能谱结构以及其量子存贮和探测光群速度的稳态解等问题。

需要指出的是，第三节中研究三能级 Λ 型原子系综两光子共振 EIT 系统时，所得出的探测光场仅仅以一个群速度传播，而且传播的群速度处于 0 到光速 c 之间，不会出现超光速，也不会出现负的群速度。这似乎和第二节中对于多模量子探测场的群速度的研究是矛盾的，因为那里光学波包会分裂成三部分传播，且传播的群速度有超光甚至可能有负群速度的存在。其实这并不矛盾。因为在第二节研究的是忽略了原子衰减时的暂态解，此时原子在与光场相互作用下会对光场有三种不同的响应，因此会出现三个以不同群速度传播的波包。但是实际中的原子内态总是有衰减的，在稍长的时间范围内整个系统会趋于一种平衡，也就是达到了稳态解的条件，第三节研究的就是这种情况。总的来说，暂态解在较短的时间范围内更有效，而稳态解适合于稍长的时间范围，这里所说的时间长短是相对于原子内态的衰减时间而言的。

最后，需要指出的是，本章的方法不仅仅是可以研究三能级 Λ 型原子系综 EIT 系统，对于其他的一些三能级系统或者四能级系统也是可行的。比如，最

近有人用我们的这种集体激发的方法研究了双 Λ 型四能级原子系综 EIT 系统 [132]。还比如下章将要介绍的我们对于其它原子系综 EIT 系统的几何量子存贮的研究，也基于本章所引入的方法。

第六章 基于原子系综的几何量子存贮

上一章介绍了基于 Λ 型三能级原子系综的 EIT 系统的量子存贮的研究，本章将在此基础上进一步介绍我们基于 EIT 的原子系综系统的几何量子存贮的研究工作。首先，在上章的 Λ 型三能级原子系统的基础上，使两个光场不严格保持有两光子共振的条件，而是近似地满足两光子共振，或者说保持微小的两光子失谐，但是探测光的频率仍然保存在由控制光打开的“透明”窗口内。此时，通过将探测光强度和两光子失谐两个参量，可以实现所谓的几何量子存贮。然后，我们通过增加一个只与激发态耦合的亚稳态和与之相应耦合的经典探测场，扩展到类似的四能级原子系综系统，此时可以选择三光子共振下的两个经典控制场的强度（或者选择近三光子共振下的两个两光子失谐和两个控制场的强度）作为系统的参量，从而实现四能级原子系综系统的几何量子存贮。

§6.1 三能级原子系综近两光子共振 EIT 的几何量子存贮

早在二十世纪 80 年代，Berry 发现了量子态在量子系统中沿其参数空间绝热地演化一周后回到初始位置时，除了获得动力学相因子之外还会获得一个附加的几何相因子 [43]，后来人们称之为 Berry 相因子 [133]。最近，Berry 几何相因子以及它的推广引起了量子计算中理论上和实验上的广泛研究 [134, 135, 136]。在完成量子信息过程中，因为 Berry 几何相因子的稳固性使得可以避免一些导致退相干源的影响 [137, 138, 139]，所以可以利用 Berry 相因子的几何特性来完成量子信息过程。比如人们发现，利用量子态的绝热几何相可以实现两量子位之间的条件几何量子相移门 [135]。并且有人 [140] 证明了利用条件量子相位门加上单量子操作，就可以构造出任意的量子逻辑门。由于 Berry 相的几何特性，由此实现的通用门具有的某种自然的容错性，这样可以大大提高量子计算机的容错能力。

既然 Berry 几何相因子能够在绝热的循环演化中出现。这就引发一个新的想法，考虑到上一章提到的基于原子系综 EIT 系统存贮光量子信息的方案中，其写入和读出两个过程刚好构成一个绝热的循环演化。那么如何能够在基于原子系综的系统中实现量子光的几何量子存贮呢？基于这个想法，本节介绍我们关于三能级原子系综 EIT 系统的集合量子存贮的研究工作 [35]。

首先来看一个具有 Berry 相的一般情况下的量子信息存贮过程（如图 6.1）。假定 M 是量子存贮体，其用于存贮量子信息的空间的基矢为： $|M_n\rangle$ ($n = 1, 2, \dots, d$)。将要被存贮的系统 S 的基矢为 $|s_n\rangle$ ($n = 1, 2, \dots, d$)。受控的相

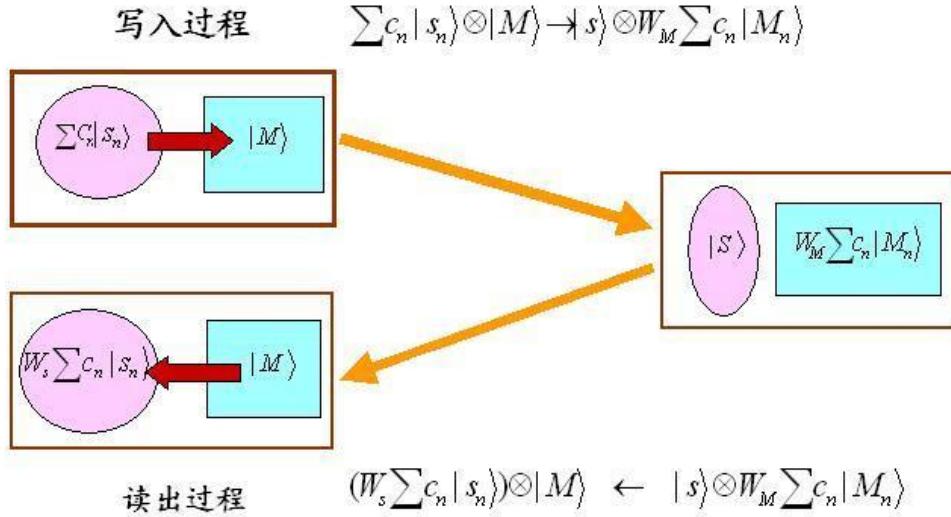


图 6.1: 几何量子存储示意图。

互作用哈密顿量 $H = H(t) = H[\mathbf{R}(t)]$ 的循环变化周期 T 由绝热改变的参数 $\mathbf{R}(t) = (R_1(t), R_2(t), \dots, R_s(t))$ 来决定。如果哈密顿量 H 中存在一系列简并基态 $|E_n(t)\rangle$ ，对于每个 n ，它们在初始时的态为: $|s_n\rangle \otimes |M\rangle$ ，末态为 $|s\rangle \otimes |M_n\rangle$ ，那么当 Berry 相因子 $W(t)$ 存在一个因子化的结构时，可以定义一个几何量子存储。从数学上来看， $|E_n(t)\rangle$ 和 $W(t)$ 需要满足

$$\begin{aligned} |E_n(0)\rangle &= |s_n\rangle \otimes |M\rangle, \quad |E_n(T')\rangle = |s\rangle \otimes |M_n\rangle, \\ |E_n(T)\rangle &= |s_n\rangle \otimes |M\rangle, \\ W(T') &= 1 \otimes W_M, \quad W(T) = W_S \otimes 1, \end{aligned} \tag{6.1}$$

其中 $T'(< T)$ 是一个居中的时刻。事实上，要将 S 系统中的任意态 $|s(0)\rangle = \sum_n c_n |s_n\rangle$ 写入一个初态为 $|M\rangle$ 的 M 系统中，需要完成从 $t = 0$ 时刻到 $t = T'$ 时刻的受控时间演化:

$$\sum_n c_n |s_n\rangle \otimes |M\rangle \rightarrow |s\rangle \otimes W_M \sum_n c_n |M_n\rangle, \tag{6.2}$$

当要从 M 系统中读取信息时则需要完成从 $t = T'$ 时刻到 $t = T$ 时刻的一个受控制的时间演化过程:

$$|s\rangle \otimes W_M \sum_n c_n |M_n\rangle \rightarrow (W_S \sum_n c_n |s_n\rangle) \otimes |M\rangle. \tag{6.3}$$

这两个过程构成了一个具有 Berry 相因子的循环演化。由于因子 $W_S = W_S[C]$ 是几何的， $|s_n\rangle$ 能够用一个纯几何的方式容易地从 $|f_n\rangle = W_S|s_n\rangle$ 解码出来。特殊地，当演化因子 $W_S = W_M = 1$ 时，存入后的态和读取出的态都与开始时的态形式上完成一样，第三章和第五章所谈及的基于 EIT 的原子系综中的光量子存储都属于这种类型。下面考虑一种一般意义上的量子光场的几何量子信息存储过程。

模型如图 6.2，原子系综由 N 个等同的三能级 Λ 型原子构成，原子的两个跃迁分别与两个单模光场耦合。其中，原子的 $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ 跃迁与频率为 ω 的量子探测光场共振耦合 ($\omega = \omega_{ab}$)，耦合系数为 g ；每个原子的 $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ 跃迁与一个近共振的经典控制光场耦合 (控制场频率为 v ，失谐为 $\delta = \omega_{ac} - v$)，耦合的系数即 Rabi 频率为 $\Omega(t)$ 。记 $\hbar = 1$ ，那么在旋波近似下，相互作用表象下的相互作用哈密顿量为 [118]

$$H_I = g\sqrt{N}aA^\dagger + \Omega \exp[i\phi(t)]S_+ + h.c., \quad (6.4)$$

其中 $\phi(t) = \delta t$ ，且利用了下列定义的集体算符：

$$A = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sigma_{ba}^{(j)}, \quad S_- = \sum_{j=1}^N \sigma_{ca}^{(j)}, \quad S_+ = (S_-)^\dagger, \quad (6.5)$$

其中， $\sigma_{\mu\nu}^{(j)} = |\mu\rangle_{jj}\langle\nu|$ 是第 j 个原子的反转算符； a^\dagger 和 a 是量子光场的产生和湮没算符。为了方便起见，耦合系数 g 、 Ω 设定为实量，并且对于系综中所有的原子都是等同的。

参照上一章介绍的处理原子集体激发的方法，可以类似考虑在大 N 极限和低激发条件下系统的动力学对称性。首先引入集体算符：

$$S_3 = \sum_{j=1}^N (\sigma_{aa}^{(j)} - \sigma_{cc}^{(j)})/2, \quad (6.6)$$

它和 S_- 以及 S_+ 构成 $SU(2)$ 代数。通过计算 A 和 $SU(2)$ 代数中的算符的对易关系，可以使得引入一个新的集体算符 $C := [A, S_+]$ ，具体表达式为：

$$C = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sigma_{bc}^{(j)}, \quad (6.7)$$

C 满足对易关系：

$$[C, S_-] = A, \quad (6.8)$$

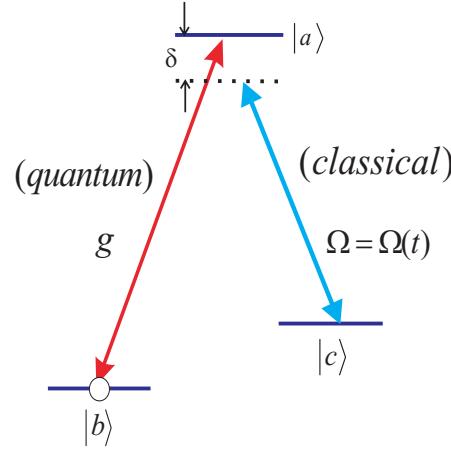


图 6.2: 三能级原子与两光场耦合, 其中量子探测光场与原子跃迁共振耦合, 经典控制场与原子跃迁存在小的失谐 δ 。

而且在大 N 极限和低激发条件下, A 和 C 是两个独立的玻色算符:

$$[A, A^\dagger] = 1, \quad [C, C^\dagger] = 1, \quad [A, C^\dagger] = [A, C] = 0. \quad (6.9)$$

综上所知, 上述系统仍然存在类似的半直积代数结构 $SU(2) \overline{\otimes} h_2$:

$$[SU(2), h_2] \subset h_2. \quad (6.10)$$

考虑到上述哈密顿量中的附加的相位因子 $\exp[i\phi(t)]$, 需要重新定义暗态 (亮态) 极化子:

$$\begin{aligned} D &= D(\theta, \phi) = a \cdot \cos \theta - C \cdot \sin \theta e^{i\phi}, \\ B &= B(\theta, \phi) = a \cdot \sin \theta + C \cdot \cos \theta e^{i\phi}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

其中, $\theta = \theta(t) = \arctan g\sqrt{N}/\Omega(t)$ 。很明显, B 和 D 仍然满足玻色对易关系, 它们仍然是两个独立的玻色算符。而且容易证明: $[H_I, D] = 0$ 。由此, 我们可以构造出一组瞬时的本征暗态:

$$|d_n(t)\rangle = |d_n[\theta, \phi]\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} D^{\dagger n} |\mathbf{0}\rangle, \quad (6.12)$$

其中, $|\mathbf{0}\rangle = |0\rangle_p \otimes |\mathbf{b}\rangle \equiv |0\rangle_p \otimes |b, b, \dots, b\rangle$ 表示整个系统的基态, 即原子都处于能级基态, 光场处于真空态。记能量简并的所有暗态所构成一个系统的存贮子空间为 $\mathbf{V}(t)$ 。下面来考虑基于暗态子空间上的几何量子存贮。

在光场与原子相互作用的初始时刻, $\Omega(0)$ 远远大于 $g\sqrt{N}$ 使得 $g\sqrt{N}/\Omega(0) \rightarrow 0$, 那么系统的态一般可以表为:

$$|\Phi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle_p \otimes |\mathbf{b}\rangle = \sum_n c_n |d_n(0)\rangle \in V(t=0). \quad (6.13)$$

因为此时原子处于完全没有激发的集体基态, 所以量子信息完全由光场的叠加态 $|s(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle_p$ 编码而成。那么在满足绝热演化的条件下, t 时刻时的系统仍然将保持在此时的瞬时暗态空间 $V(t)$ 上。详细的计算表明, 此时要满足的简并的暗态之间的绝热条件 [120, 121] 为:

$$\frac{g\sqrt{N} |\dot{\Omega}|}{(\sqrt{g^2 N + \Omega^2})^3} \ll 1, \quad \frac{g\sqrt{N} |\delta\Omega|}{(\sqrt{g^2 N + \Omega^2})^3} \ll 1. \quad (6.14)$$

从上式中可以看到, 要有效的完成系统中量子信息的存贮与转换, 必须满足系统的经典控制场的 Rabi 频率 Ω 的改变不太快, 而且还需满足失谐量比较的小。

需要指出的是, 在上述绝热演化下, 此时系统的量子态不再象上一章完全共振的情况时一样保持在

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_n c_n(0) |d_n(t)\rangle \quad (6.15)$$

的态上, 而应该是系数 $c_n(t)$ 也随时间改变的态

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |d_n(t)\rangle, \quad (6.16)$$

其中 $c_n(t)$ 由下式决定 [120, 121] :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}(t) = K(t) \mathbf{C}(t), \quad (6.17)$$

$\mathbf{C}(t)$ 和 $K(t)$ 的详细表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) &= (c_0(t), c_1(t), c_2(t), \dots)^T, \\ K(t) &= (-\langle d_m(t) | \partial_t d_n(t) \rangle)_{m,n=0,1,2,\dots}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

$\mathbf{C}(t)$ 的形式解为:

$$\mathbf{C}(t) = W(t) \mathbf{C}(0), \quad (6.19)$$

其中时序积分 $W(t) = T \exp\{\int K(t)dt\}$ 就是所谓的非阿贝尔的 Berry 相因子。这个非对角的非阿贝尔 Berry 相因子通过一个非阿贝尔的规范结构将不同的瞬时本征暗态 $|d_n(t)\rangle$ 混合起来。一般情况下，求解非阿贝尔 Berry 相因子的详细表达式是很困难的。幸运的是，在基于我们上述系统中的量子信息存贮方案中，上述的非阿贝尔 Berry 相因子是对角化的。因为可以证明， $K(t)$ 是对角的。这样问题的计算将相对简单得多。

直接的计算有：

$$\begin{aligned}\dot{D} &= -(\dot{\theta} + i\delta \sin \theta \cos \theta) \cdot B + i\delta \sin^2 \theta \cdot D, \\ \dot{B} &= (\dot{\theta} - i\delta \sin \theta \cos \theta) \cdot D + i\delta \cos^2 \theta \cdot B.\end{aligned}\quad (6.20)$$

因此，很容易可得： $K(t)_{m,n} \propto \delta_{m,n}$ ，这样，Berry 相因子简化成了一个对角矩阵，其矩阵元为：

$$W(t)_{m,n} = \delta_{m,n} \exp\{i\gamma_n(t)\}, \quad (6.21)$$

其中，阿贝尔化的 Berry 相位为：

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle d_n(\tau) | \frac{d}{d\tau} | d_n(\tau) \rangle d\tau \equiv n\gamma(t), \quad (6.22)$$

其中定义了

$$\gamma(t) = - \int_0^t \dot{\phi} \sin^2 \theta d\tau. \quad (6.23)$$

利用上述的表达式，现在可以回答以下问题：在量子信息存贮中 Berry 相的几何性质究竟是什么。先引入由以下参量构成的参数空间：

$$\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3) = (g\sqrt{N} \cos \phi, g\sqrt{N} \sin \phi, \Omega(t)), \quad (6.24)$$

其中 $R = \sqrt{g^2 N + \Omega^2}$ 。当 $\Omega(t)$ 的演化周期 $T = \frac{2\pi}{\delta}$ 与 ϕ 的周期一致时，参数 $\mathbf{R}(t)$ 的路径可以想象为一个由 $R_1^2 + R_2^2 = g^2 N$ 表示的圆柱面上的一个闭合的曲线 C （见图 6.3）。这样，随着系统参数 $\Omega(t)$ 的绝热操纵，就实现了具有 Berry 几何相因子的量子信息存贮的动力学过程。

图 6.3 所示说明了如何将一个由光子态 $|\varphi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle_p$ 所承载的量子信息写入一个基于原子系综的存贮体中。初始时刻 $t = 0$ 时， $\Omega(0)$ 远远大于 $g\sqrt{N}$ ，也就是说 $\Theta(0) = 0$ ，此时系统的初态为 $|\Phi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle_p \otimes |\mathbf{b}\rangle$ ，系统的信息

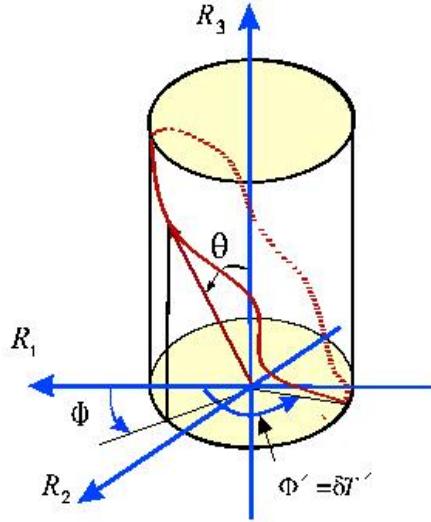


图 6.3: 几何量子存贮的拓扑性质: 参数的演化构成参数空间的圆柱 $R_1^2 + R_2^2 = g^2 N$ 上的一个闭合曲线。信息写入过程: $t = 0$ 时, $\Omega(0)$ 很大, 系统处于参数空间上的点 $(g\sqrt{N}, 0, +\infty)$, 然后沿着曲线 C 绝热地改变 $\Omega(t)$, 使之在 $t = T'$ 时 $\Omega(T') \rightarrow 0$, 系统处于参数空间上的点 $(g\sqrt{N} \cos \phi', g\sqrt{N} \sin \phi', 0)$, 信息全部存贮于原子系统中。信息读出过程: 从 $t = T'$ 时开始沿着曲线 C 绝热地调节, 使得 $t = T$ 时系统回到初始时刻参数空间上的点 $(g\sqrt{N}, 0, +\infty)$ 。

完全是光子态决定。当绝热的改变 $\Omega(0)$ 使得到 $t = T'$ 时刻时满足 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 那么此时系统的态将变为原子集体激发的类型:

$$\begin{aligned} |\Phi(t = T')\rangle &= \sum_n c_n(T_M) |d_n(T')\rangle \\ &= |0\rangle_p \otimes \sum_n \exp[in\gamma(T')] (-1)^n c_n |n\rangle_c, \end{aligned} \quad (6.25)$$

其中, $|n\rangle_c = (1/\sqrt{n!}) C^{\dagger n} |\mathbf{b}\rangle$ 是多原子 Dicke 态 [92]。此时, 完成了由初始时刻的光子态的信息存贮到 T' 时刻的完全由原子激发类型的态的写入过程。

量子信息的读出过程如下: 绝热改变系统的参量使得在当 $t = T$ 时, $\Omega(T)$ 远远大于 $g\sqrt{N}$, 也就是 $\Theta(T) = 0$, 实际上 T 就是循环演化一周期的时间。此时系统的态为:

$$|\Phi(T)\rangle = \left(\sum_n c_n \exp[in\gamma_C] |n\rangle_p \right) \otimes |\mathbf{b}\rangle. \quad (6.26)$$

此时系统的信息完全由光子的态来决定, 不过由于几何 Berry 相因子的存在, 使

得此时的态相对于初始时刻的态有相位上一些改变。进一步的计算表明，上述的 Berry 拓扑相位满足 $\gamma_n[C] = n\gamma[C]$:

$$\gamma[C] = - \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{-g^2 N d\phi}{g^2 N + F(\phi)^2}, \quad (6.27)$$

其中 $F(\phi) = \Omega(\phi/\delta)$ 满足以下条件

$$F(0) \rightarrow \infty, \quad F(\phi') \rightarrow 0, \quad F(2\pi) \rightarrow \infty, \quad (6.28)$$

其中 $\phi' = \delta T'$ 。沿着柱面上两个固定点 $(g\sqrt{N}, 0, \infty)$ 和 $(0, g\sqrt{N}, 0)$ 的积分决定了 $\gamma[C]$ 的拓扑性质。事实上，沿着环路的积分取决于环路对零点所张成的立体角，不同的环路只要立体角一样，它们就具有相同的 Berry 几何相因子。因此，由写入和读出构成的循环演化所伴随的因子化的 Berry 相因子

$$W(T) = \sum_n \exp(in\gamma[C]) |n\rangle_{pp} \langle n| \otimes I \quad (6.29)$$

是具有几何性质的。这样， $|\varphi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle_c$ 能够很好地用一个纯几何的方法从

$$|f_n\rangle = W_S |\varphi\rangle = \sum_n c_n \exp(in\gamma[C]) |n\rangle_p \quad (6.30)$$

进行编码。

值得指出的是，象先前的准自旋波集体激发原子系综系统的研究一样 [118]，在大 N 极限和原子的低激发条件下，当前的基于原子系综的量子存贮系统也有一个类似的瞬时隐含动力学对称性，因此，严格说来也应该有更多的与暗态能量简并的一系列本征态。由于这些额外的态包含有原子态 $|a\rangle$ 的集体激发，所以它们不同于上述的暗态 $|d_n\rangle$ 仅仅存在态 $|c\rangle$ 的集体激发。严格的计算可以证明，在绝热演化下，暗态与上述的额外的简并态之间不会存在混合，也就是说，系统参数的绝热演化不会导致暗态子空间上的初态不会演化到该子空间以外的态空间中。这说明了上述的量子几何存贮方案是有效的。

总之，本节提出了一个广义量子信息存贮方案：允许量子态在经过提取后存在一个独立于输入的态的几何 Berry 相因子。因此，为了对一个理想的输入态进行编码，需要考虑参数空间上的几何性质。这个新颖的量子存贮的几何性质是与输入的态无关的，同时也与参数空间上的变化细节无关。

§6.2 四能级原子系综 EIT 系统的几何量子存贮

本章上一节研究了基于三能级原子系综 EIT 系统上的几何量子存贮，事实上那时涉及的几何 Berry 相因子是可以阿贝尔化的。本章将介绍我们基于四能级原子系综 EIT 系统上的量子存贮过程的研究 [36]，此时可以得到一个真正的非阿贝尔化的几何非阿贝尔 Berry 相因子。

当前所考虑的系统由 N 个四能级原子构成的系综与三个光场耦合而成，见图 6.4。每个等同的四能级原子的四个内态分别记为：基态 $|b\rangle$ 、激发态 $|a\rangle$ 和两个亚稳态 $|k\rangle$ ($k = 1, 2$)。

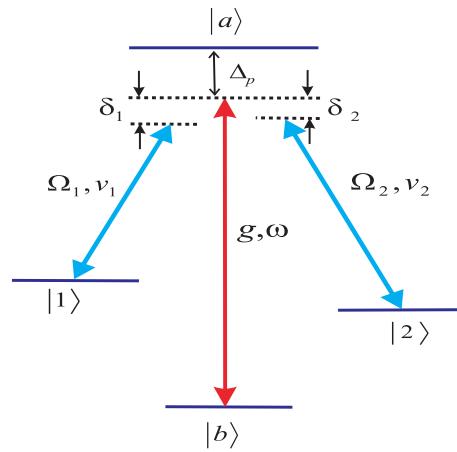


图 6.4: 四能级原子与量子探测光场 (耦合系数 g ，频率为 ω ，失谐为 Δ_p) 以及量子经典探测光场 (耦合系数即 Rabi 频率为 Ω_k ，频率为 ν_k ，失谐为 $\Delta_k = \omega_{ak} - \nu_k$, $k = 1, 2$) 耦合。当两个两光子失谐量 δ_k ($= \Delta_k - \Delta_p$) 都很小时，系统满足近三光子共振 EIT 条件。特别地，当 $\delta_{1,2} = 0$ 时，系统满足三光子共振 EIT 的条件。

其中，频率为 ω_{ab} ($= \omega_a - \omega_b$) 的原子跃迁 $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ 与一个频率为 ω 的单模量子探测光场耦合，耦合系数为 g (单光子失谐为 $\Delta_p = \omega_{ab} - \omega$)；频率为 ω_{ak} 的原子跃迁 $|a\rangle \rightarrow |k\rangle$ ($k = 1, 2$) 分别与两个经典控制场耦合，两个控制场的频率分别为 ν_k ，单光子失谐为 $\Delta_k = \omega_{ak} - \nu_k$ ，耦合系数 (即 Rabi 频率) 为 $\Omega_k(t)$ 。

事实上，相对于上节所考虑的三能级原子系统，只是在其基础上增加一个居中的亚稳态和一个相应的经典控制场。从物理直观上来看，当三个光场分别与其耦合的跃迁能级完全共振时，系统应该能够满足 EIT 的条件。这是因为当仅仅考虑两个亚稳态其中的一个而忽略另外一个时，系统与先前所说的三能级系统没有什么两样。推广到一般的情况，即使三光场与相应能级跃迁不完全共振，但只

要三个光场都具有相同的但光子失谐量，那么也应该满足 EIT 的条件。对应于三能级情况下的两光子共振，我们将此时的三个单光子失谐完全相等的情况称为三光子共振 EIT。更一般地，当三个单光子失谐不完全相等而是存在微小差别时，我们称之为近三光子共振的 EIT 系统。本章先一般地讨论近三光子共振 EIT 下的几何量子存储，然后再简化到完全三光子共振 EIT 情况下更为详细地讨论其具体细节。

在旋转波近似下，类似于三能级情况 [35, 118]，我们在相互作用表象下写出相互作用哈密顿量为 ($\hbar = 1$)：

$$\begin{aligned} H_I = & \Delta_p S + g\sqrt{N}aA^\dagger + \Omega_1 \exp[i\phi_1(t)]T_+^{(1)} \\ & + \Omega_2 \exp[i\phi_2(t)]T_+^{(2)} + h.c., \end{aligned} \quad (6.31)$$

其中 $\phi_{1,2}(t) = \delta_{1,2} \cdot t$ ，且

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^N \sigma_{aa}^{(j)}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sigma_{ba}^{(j)}, \\ T_-^{(k)} &= \sum_{j=1}^N \sigma_{ka}^{(j)}, \quad T_+^{(k)} = (T_-^{(k)})^\dagger, \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (6.32)$$

是定义的对称化的原子集体激发算符。其中， $\sigma_{\mu\nu}^{(j)} = |\mu\rangle_{jj}\langle\nu|$ 表示第 j 个原子的态 $|\nu\rangle_j$ 与态 $|\mu\rangle_j$ ($\mu, \nu = a, b, 1, 2$) 之间的翻转算符。 a^\dagger 和 a 分别是量子光场的产生和湮没算符。此外已经假定了耦合系数 g 和 Rabi 频率 $\Omega_{1,2}$ 是实数且对系综中的所有原子是等同的。对于固定了空间位置的三能级原子晶体，我们利用原子的集体准自旋波算符曾经给出了一个类似的有效相互作用哈密顿量，并且发现了隐含的动力学对称性。本章所涉及的基于原子系综中的原子对称化的集体激发恰好是准自旋波激发的一个特殊形式。事实上，当前考虑的原子系综是忽略了它的空间运动的，否则将会如第三章中所说会出现空间运动诱导的退相干。实验上采取低温下的原子系综时可以使得原子的空间运动速度很小从而可以忽略其空间运动。因此，忽略了空间运动的原子系综在本质上和固定了空间运动的原子晶体（不考虑声子等空间振动）没有什么区别。从处理上来看，原子晶体情况中的与空间位置相关的因子出现与否也不会对问题有所影响，因为每个原子中其正交归一化的内态是可以吸收一个常数的相位因子的。

下面首先考虑大 N 极限和原子低激发情况下的集体算符之间的关系。很显然， $T_-^{(k)}$ 和 $T_+^{(k)}$ ($k = 1, 2$) 将和各自的第三个算符 $T_3^{(k)}$ 构成一个 $SU(2)$ 的代数。进一步的研究表明，这两个 $SU(2)$ 的代数是系统中一个 $SU(3)$ 代数的子代

数 [141]。为了形成一个包含有 $SU(3)$ 以及算符 $\{A, A^\dagger\}$ 的封闭的代数结构, 需要引入两个附加的集体算符:

$$C_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sigma_{bk}^{(j)}, \quad (k = 1, 2) \quad (6.33)$$

以及它们相应的共轭算符 C_k^\dagger 。容易证明:

$$[A, A^\dagger] = [C_k, C_k^\dagger] = 1, \quad [A, C_k^\dagger] = [A, C_k] = 0, \quad (6.34)$$

因此, A 和 $C_{1,2}$ 是三个独立的玻色算符。此外这些算符和有 T_\pm^k 以下的非零对易关系:

$$C_k = [A, T_+^{(k)}], \quad [C_k, T_-^{(k)}] = A, \quad (k = 1, 2), \quad (6.35)$$

这些对易关系意味着在由哈密顿量 H_I 决定的对称动力学演化中, $SU(3)$ 代数和由 A 、 A^\dagger 、 C_k 和 C_k^\dagger 算子构成的 Heisenberg-Weyl 代数 h 之间存在半直积的代数结构 $SU(3)\overline{\otimes} h$ 。

基于哈密顿量中的上述隐含对称性, 可以引入一个暗态极化算符:

$$D = a \cos \theta - C \sin \theta, \quad (6.36)$$

其中,

$$C = C_1 \exp[i\phi_1(t)] \cos \kappa + C_2 \exp[i\phi_2(t)] \sin \kappa \quad (6.37)$$

是两个原子集体激发算符 C_1 和 C_2 的相干混合算符; 此外

$$\kappa = \arctan \frac{\Omega_2}{\Omega_1}, \quad \theta = \arctan \frac{g\sqrt{N}}{\Omega}, \quad \Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}. \quad (6.38)$$

引入一个新的算符:

$$T_+ = T_+^{(1)} \exp[i\phi_1(t)] \cos \kappa + T_+^{(2)} \exp[i\phi_2(t)] \sin \kappa, \quad (6.39)$$

可以将相互作用哈密顿量重写为:

$$H_I = \Delta_p S + g\sqrt{N}aA^\dagger + \Omega T_+ + h.c.. \quad (6.40)$$

因为 $[C, T_-] = A$, $[A, T_+] = C$, 所以可以很容易地证明 $[D, H_I] = 0$ 。值得注意的是, 为了产生 H_I 的多重本征暗态空间, 需要考虑另外一个与 D 完全独立的暗态极化算符:

$$E = C_2 \exp[i\phi_2(t)] \cos \kappa - C_1 \exp[i\phi_1(t)] \sin \kappa. \quad (6.41)$$

因为 E 满足以下关系：

$$[E, E^\dagger] = 1, \quad [E, D^\dagger] = [E, H_I] = 0, \quad (6.42)$$

所以 E 和 D 一样都是系统的暗态极化算符。

由此，可以通过 E 和 D 来构造出系统的所有暗态，并由这些暗态构造出系统的用来存贮量子信息的瞬时本征暗态子空间。注意由于有两个暗态算符的出现，因此此时暗态的形式比先前的三能级原子系综暗态要复杂得多。暗态的具体形式如下：

$$|D_{m,n}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!n!}} D^{\dagger m} E^{\dagger n} |\mathbf{0}\rangle, \quad (6.43)$$

其中， $|\mathbf{0}\rangle = |0\rangle_p \otimes |\mathbf{b}\rangle \equiv |0\rangle_p \otimes |b, b, \dots, b\rangle$ 表示所有原子处于其内态 $|b\rangle$ 时的集体基态，同时量子光场处于真空态 $|0\rangle_p$ 。需要指出的是，由我们定义的集体算符以及量子光场产生湮灭算符混合而成的线性算符中满足上述暗态极化算符要求的并不止 E 和 D ，但是那些算符总是可以写成 E 和 D 的线性叠加，也就是说，系综只有两个独立的线性暗态算符。

此外，还可以定义一个新的所谓的亮态极化算符： $B = a \sin \theta + C \cos \theta$ ，它与三能级 EIT 系统中定义的暗态极化算符的地位性质相当，它是一个与暗态极化算符 E 和 D 相独立的玻色算符，它与相互作用哈密顿量 H_I 不对易，但是可以利用它来产生其它一些能量与暗态简并（或者交叉）的本征态。然而由于那些本征态涉及到原子激发态 $|a\rangle$ ，所以它们不是实验上最为关心的最为稳定的暗态。上一章中，我们也证明了在绝热演化下这些态不会与暗态子空间中的态相混合，因此，本章先不考虑这些暗态空间之外的系统本征态对暗态存贮空间的影响。

为了研究基于暗态子空间中的几何量子存贮，我们先考虑在参数 $\Omega_{1,2}(t)$ （以及 $\phi_{1,2}(t)$ ）的绝热演化下系统在暗态存贮子空间上的量子演化。严格的计算表明，系统所要遵循的绝热条件 [120, 121] 为：

$$\frac{g\sqrt{N}x_k}{(\sqrt{g^2N+\Omega^2})^3} \ll 1, \quad x_k = |\dot{\Omega}_k|, \Omega\delta_k, \quad (6.44)$$

其中， $k = 1, 2$ ， $\Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$ 。从上式可以看出，为了使基于暗态子空间上的量子存贮的有效性，必须满足经典控制场的 Rabi 频率 $\Omega_{1,2}$ 的变化是缓慢的，同时还必须有失谐量 $\delta_{1,2}$ 很小。上式的严格计算需要涉及到暗态之外的其它本征态，此处省略了详细的计算步骤。尽管如此，仍然可以从公式 (6.44) 中看出

其正确性。事实上，当两个居中态中的一个以及其相应控制光场不存在时，公式(6.44)自动简化为上章中的三能级原子系综时的公式(5.26)。

下面考虑暗态子空间 $\mathcal{V}(t)$ 上的一个一般态的演化：

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_{m,n} c_{mn}(t) |D_{m,n}(t)\rangle, \quad (6.45)$$

直接的计算表明其系数要满足的方程 [120, 121] 为：

$$\partial_t \mathbf{C}(t) = \mathbf{K}(t) \mathbf{C}(t), \quad (6.46)$$

其中系数列阵 $\mathbf{C}(t)$ 和链接矩阵 $\mathbf{K}(t)$ 是

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) &= (c_{00}(t), c_{01}(t), \dots; c_{10}(t), c_{11}(t), \dots)^T, \\ \mathbf{K}(t)_{m,m',n,n'} &= -\langle D_{m',n'}(t) | \partial_t D_{m,n}(t) \rangle \quad (m, m', n, n' = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (6.47)$$

的缩写。由于 $c_{m,n}(t)$ 中的 m 和 n 的数值（也就是所相应的暗态中的 m, n ）取决于暗态算符 D^\dagger 和 E^\dagger 作用于真空态的次数。这就是说， m 和 n 的最大值取决于实际系统中集体激发的最大数目（也等于单模量子光场中光子的数目），虽然激发的最大数目要远远小于原子的总数 N （满足低激发条件），但是事实上由于原子总数的宏观性，集体激发的最大值可以取得很大。特殊地，当所考虑的系统中初始时量子光场处于相干态时，由于其中含有光子数趋于无穷大的项，因此其相应转换后的集体激发也会变得无穷大，这似乎与低激发的条件不符合。但是实际上，只要光场初始时的相干态的平均光子数满足低激发条件，当前的处理也应该是行之有效的。因此，在一般考虑中，瞬时暗态本征空间 $\mathcal{V}(t)$ 人为地取为无穷维空间。实际的过程中可以根据初始的光场量子态来选取其中的某些子块。

我们已经给出了 $\mathcal{V}(t)$ 空间中的任意态在绝热演化下的表达式，理论上知道了初态就可以计算出系统任意时刻的状态，从而通过在系统参量的控制而完成所谓的几何量子存贮。但是由于瞬时暗态本征空间 $\mathcal{V}(t)$ 的高维性质，一般情况下很难详细地写出连接矩阵 $\mathbf{K}(t)$ 的具体表达式。而且由于连接矩阵 $\mathbf{K}(t)$ 的非阿贝尔性质，这样使得 $\mathcal{V}(t)$ 的时间演化矩阵是一个对 $\mathbf{K}(t)$ 编时积分的无比繁琐的矩阵。

幸运的是，进一步的研究表明，瞬时暗态本征空间 $\mathcal{V}(t)$ 是可以约化的，因此问题将变得简化得多。

先来考虑具体的连接矩阵元的表达式。定义：

$$f_{DD}(t) := [D, \partial_t D^\dagger] = -i \sin^2 \theta (\delta_1 \cos^2 \kappa + \delta_2 \sin^2 \kappa),$$

$$\begin{aligned}
f_{ED}(t) &= [E, \partial_t D^\dagger] = -\dot{\kappa} \sin \theta + i(\delta_2 - \delta_1) \sin \theta \cos \kappa \sin \kappa, \\
f_{DE}(t) &= [D, \partial_t E^\dagger] = [-f_{ED}(t)]^*, \\
f_{EE}(t) &= [E, \partial_t E^\dagger] = -i(\delta_1 \sin^2 \kappa + \delta_2 \cos^2 \kappa).
\end{aligned} \tag{6.48}$$

那么对于 $l' \geq m \geq 0$ 和 $l \geq n \geq 0$ ，有

$$\begin{aligned}
&\langle D_{l'-m,m}(t) | \partial_t D_{l-n,n}(t) \rangle \\
&= \delta_{l',l} \delta_{m,n} [(l-m)f_{DD}(t) + m f_{EE}(t)] \\
&\quad + \delta_{l',l} \delta_{m,n-1} \sqrt{(m+1)(l-m)} f_{DE}(t) \\
&\quad + \delta_{l',l} \delta_{m,n+1} \sqrt{m(l-m+1)} f_{ED}(t).
\end{aligned} \tag{6.49}$$

从上式中的 $\delta_{l',l}$ 可以很清楚的看到连接矩阵只在当具有相同激发数目的暗态之间具有跃迁，因此在整个子空间 $\mathcal{V}(t)$ 中，可以通过集体激发的总数来标识不同的约化子块，这样 $\mathcal{V}(t)$ 可以写成直乘的形式： $\mathcal{V}(t) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{V}_l(t)$ ，其中 $\mathcal{V}_l(t) = \text{span}\{|D_{l-m,m}(t)\rangle | m = 0, 1, \dots, l\}$ ，其维数为 $(l+1)$ 维。这样，每个子块 $\mathcal{V}_l(t)$ 都保持为绝热演化中的一个不变子空间。也就是说，如果初始时的一个态 $|\Phi_l(0)\rangle \in \mathcal{V}_l(0)$ ，那么 t 时刻的态必然有 $|\Phi_l(t)\rangle = \sum_m c_m^{(l)}(t) |D_{l-m,m}(t)\rangle \in \mathcal{V}_l(t)$ 。 $\mathcal{V}_l(t)$ 不变子空间上的动力学由约化动力学方程

$$\partial_t \mathbf{C}_l(t) = \mathbf{K}_l(t) \mathbf{C}_l(t) \tag{6.50}$$

来决定，其中子系数矢量 $\mathbf{C}_l(t)$ 和约化的连接矩阵 $\mathbf{K}_l(t)$ 的详细表示式为

$$\mathbf{C}_l(t) = (c_0^{(l)}(t), c_1^{(l)}(t), \dots, c_l^{(l)}(t))^T, \tag{6.51}$$

$$\mathbf{K}_l(t) = (-\langle D_{l-m,m}(t) | \partial_t D_{l-n,n}(t) \rangle)_{m,n=0,1,2,\dots,l}. \tag{6.52}$$

系数矢量 $\mathbf{C}_l(t)$ 的形式解为

$$\mathbf{C}_l(t) = \mathbf{W}_l(t) \mathbf{C}_l(0), \tag{6.53}$$

其中演化矩阵 $\mathbf{W}_l(t) = \mathbf{T} \exp[\int \mathbf{K}_l(t) dt]$ 就是动力学过程中的非阿贝尔和乐，其中 \mathbf{T} 表示时序算符。这个非阿贝尔和乐是非对角的，它将会使 $\mathcal{V}_l(t)$ 子空间上的不同暗态 $|D_{l-m,m}(t)\rangle$ ($m = 0, \dots, l$) 之间互相耦合，这意味着一个纯的非阿贝尔规范被引入了。

下面讨论上述系统的一种简单情况： $\delta_{1,2} \equiv 0$ 。这时，系统是一个满足完全三光子共振 EIT 的条件，系统的参量就简化成了两个经典光场控制场的 Rabi 频

率，这样的一个简化系统仍然有非阿贝尔几何相因子的出现，同时这在实验也是极好控制和实现的。那么此时上述所有的公式包括哈密顿量和集体算符的定义以及对易关系都没有任何变化，同样，瞬时暗态不变子空间 $\mathcal{V}_l(t)$ 也同样存在，只是此时其中的演化会变得简化而已。事实上，此时子空间 $\mathcal{V}_l(t)$ 相应的子连接系数可以简化为：

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_l(t) &= (-\langle D_{l-m,m}(t)|\partial_t D_{l-n,n}(t)\rangle)_{m,n=0,1,2,\dots,l} \\ &\equiv \dot{\kappa} \sin \theta \mathbf{K}_l^{(0)},\end{aligned}\quad (6.54)$$

其中 $\mathbf{K}_l^{(0)}$ 是一个与时间无关的系数矩阵，它的第 (m, n) 个矩阵元为

$$\delta_{m,n-1}\sqrt{(m+1)(l-m)} - \delta_{m,n+1}\sqrt{m(l-m+1)}. \quad (6.55)$$

因此，此时演化算符变得与时序无关了，其精确形式给出为

$$\mathbf{W}_l(t) = \exp[\phi(t)\mathbf{K}_l^{(0)}], \quad (6.56)$$

其中， $\phi(t) = \int \dot{\kappa} \sin \theta dt$ 。

可见在简化的两参数情况下系数矩阵将变得简化多了。这样就得到了一个非阿贝尔的几何相因子。但是注意到每个子空间 $\mathcal{V}_l(t)$ 相应的子连接系数中的 $\mathbf{K}_l^{(0)}$ 尽管是一个常数矩阵，可是它们都是非对角的。可否考虑做一个变换，可能使得所有的子空间 $\mathcal{V}_l(t)$ 上的与时间相关的连接矩阵恰好都是对角的呢？事实上存在这样一个变换。注意到 $\mathbf{K}_l^{(0)}$ 正比于 $(E^\dagger D - h.c.)$ 在子空间 $\mathcal{V}_l(t)$ 上的表示。可以考虑选择一对特殊的新的暗态算符，通过它们作用在真空态上产生的暗态作为新的基矢，从而使得在新的基矢上，基于上述的子空间 $\mathcal{V}_l(t)$ 上的连接矩阵刚好是对角的。

引入以下一个变换，使得原来的暗态极化算符 D 和 E 变换为一组新的暗态极化算符：

$$D' = \frac{1}{\sqrt{2}}(iD + E), \quad E' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-iD + E), \quad (6.57)$$

新的暗态算符所相应的暗态为：

$$|D'_{l-n,n}(t)\rangle = \frac{D'^{\dagger l-n}E'^{\dagger n}}{\sqrt{(l-n)!n!}}|\mathbf{0}\rangle. \quad (6.58)$$

直接的计算有新的子连接矩阵：

$$\mathbf{K}'_l(t) = -i\dot{\kappa} \sin \theta \text{diag}(l, l-2, \dots, -l), \quad (6.59)$$

相应的时间演化算符为：

$$\mathbf{W}'_l(t) = \text{diag}(e^{-il\phi(t)}, e^{-i(l-2)\phi(t)}, \dots, e^{il\phi(t)}), \quad (6.60)$$

其中， $\phi(t) = \int \kappa \sin \theta dt$ 。

一般地，在基于 EIT 的量子信息存贮方案中，初始时刻经典控制光场的 Rabi 频率 $\Omega_{1,2}$ 相对于 $g\sqrt{N}$ 是很大的，之后再绝热地独立地减少 $\Omega_{1,2}$ 的值（见图 6.5）。因此初始时刻时， $\theta(t=0) \rightarrow 0$ ， $D(0) \rightarrow a$ ，如果将要被存贮的任何量子光场初态为 $\sum_l c_0^{(l)}(0)|l\rangle_p$ ，此时系统总的初态可以写为

$$|\Phi(0)\rangle = \sum_l c_0^{(l)}(0)|l\rangle_p \otimes |\mathbf{b}\rangle. \quad (6.61)$$

在新的基矢 $|D'_{l-m,m}(t)\rangle$ 下可以将初态改写为

$$|\Phi(0)\rangle \equiv \sum_{l,m} c_m^{(l)}(0)|D'_{l-m,m}(0)\rangle, \quad (6.62)$$

其新基矢下的系数为：

$$c_m^{(l)}(0) = \frac{(-1)^{l-m}\sqrt{l!}c_0^{(l)}(0)}{(i\sqrt{2})^l\sqrt{m!(l-m)!}}. \quad (6.63)$$

那么在此后的任意时刻，根据公式 (6.60)，系统的状态将为

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_{l,m} c_m^{(l)}(t)|D'_{l-m,m}(t)\rangle, \quad (6.64)$$

其中

$$c_m^{(l)}(t) = \exp[-i(l-2m)\phi(t)]c_m^{(l)}(0). \quad (6.65)$$

这就是说，在新的基矢下，暗态空间中的每个以 l 标识的不变子空间中，各个暗态之间不会有模式的混合，在时间演化下唯一的变化是各个态的位相会有相应的改变。特殊地，在时间 $t = \tau$ 时，系统的参量减到足够小的时候（即 $\Omega_{1,2} \ll g\sqrt{N}$ ），有：

$$\theta(\tau) \rightarrow \pi/2, \quad D(\tau) \rightarrow -C_1 \cos \kappa - C_2 \sin \kappa. \quad (6.66)$$

这样，初始时刻的纯光子类型的量子信息就全部存贮于原子集体激发类型之中了，也就完成了一个量子信息存贮方案的信息写入过程。

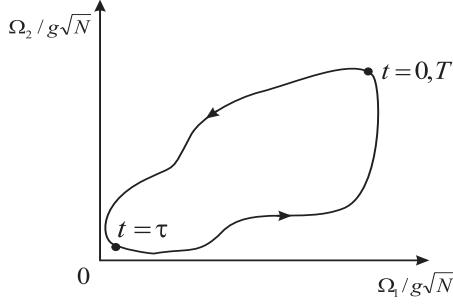


图 6.5: 参数 $\Omega_{1,2}$ 的循环演化。 $t = 0$ 和 $t = T$ 时的参数重合: $\Omega_{1,2} \gg g\sqrt{N}$ 。
 $t = \tau$ 时, $\Omega_{1,2} \ll g\sqrt{N}$ 。

为了成功地读出寄存在原子系综中的量子信息, 需要重新绝热地将系统的参数 $\Omega_{1,2}$ 增强到初始时刻时的条件: $\Omega_{1,2} \gg g\sqrt{N}$ 。将读出过程和写入过程合起来看, 系统的参数刚好构成了一个回路。见图 6.5, 当时间从 $t = 0$ 回复到 $t = T$ 时刻时, 系统参数演化刚好为一个周期, 此时 $\Omega_{1,2} \gg g\sqrt{N}$ 。但是由于几何 Berry 相因子的存在, 此时系统的态不再是初始时刻完全由光子的类型组成的初态, 而是也参与了原子激发的类型。如果需要完全精确地提取出绝热演化初始时的量子态, 那么必须对整个系统做一个幺正变换, 以此消去绝热演化过程中所带来的非阿贝尔 Berry 相因子。

我们再次注意到几何相因子的含义, 如图 6.5 所示, 只要绝热演化的循环路线给定了, 最终的几何非阿贝尔 Berry 相因子的演化矩阵就给定了, 无论参数改变的快慢如何, 也无论系统的初态怎么选取, 所得的演化矩阵都不变。

特别地, 当给定参数的某些特殊路径时, 会得到一些简化的结果。如果某条 $\Omega_{1,2}$ 的循环路径的选取可以使得

$$\phi(T) = \int_0^T \dot{\kappa} \sin \theta dt \equiv \oint \sin \theta d\kappa = 2j\pi, \quad (6.67)$$

其中 j 是整数。那么演化矩阵就是一个单位阵, 即有 $c_m^{(l)}(T) = c_m^{(l)}(0)$, 也就是说 T 时刻的态又刚好恢复到完全是光子类型的初态时的情况。

下面就当前的工作与其它一些量子信息过程中的一般和乐群方法 [134, 136] 进行比较。在这些工作中 [134, 136], 信息是通过一系列参数哈密顿量的简并本征态进行编码的。一般情况下普适的量子计算 [142] 可以仅仅通过非阿贝尔和乐来完成。对于非平庸和乐的情况, 如果通过一个绝热的循环来标定一个量子态的变换而是想去掉绝热循环带来的影响, 那么很明显的, 当前讨论的基于 EIT 的规则表示了其一般策略上的一个例子。例如, 对于单激发子空间 \mathcal{V}_1 , 可以编码

一位量子位： $|0\rangle := E'^\dagger|0\rangle$ ， $|1\rangle := D'^\dagger|0\rangle$ 。那么变换(6.60)刚好是对角的所谓相位变换[142]。如果想得到非对角的单量子位操作，必须让 $\delta_{1,2}$ 不再为0。若要考慮实现普遍的计算，需要对多位的量子态进行编码并且要制定相应系统之间的可控制的几何耦合，因此，要实现这样一个考虑到多种噪声源所带来误差的强固存贮体还需要更深层次的讨论。

§6.3 小结

本章研究了基于原子系综中量子光的几何量子存贮问题。考慮到几何 Berry 相位在量子计算中的作用，我们首次提出了几何量子存贮的概念。并且研究了利用基于原子系综的 EIT 系统实现光子的几何量子存贮。首先，参照第五章中对于三能级 Λ 型原子系综单光子共振和双光子共振的 EIT 研究，本章讨论了 Λ 型原子系综近共振 EIT 系统，发现该系统中仍然存在隐藏的 $SU(2)\overline{\otimes} h_2$ 系统对称性，而且当参数空间绝热调控地完成一个循环演化时，系统的态将出现一个与绝热操纵细节无关的阿贝尔的几何 Berry 相，这样就可以实现原子系综上光子的几何量子存贮问题。然后，本章进一步研究了四能级原子系综近三光子共振 EIT 系统，类似的系统对称性 $SU(3)\overline{\otimes} h_3$ 被发现了，当参数空间在绝热调控下完成一个循环演化时，会出现一个非阿贝尔的几何 Berry 相。因此，在这样一个四能级原子系综 EIT 系统中能够实现光子的非阿贝尔几何量子存贮。并且针对四能级原子系综三光子共振 EIT 系统的简化情况，讨论了此时非贝尔 Berry 相的如何进行阿贝尔化，详细研究了如何方便地完成一个基于该原子系综 EIT 系统的几何量子存贮过程。

第七章 总结和展望

量子存储是实现量子信息量子计算的一个重要环节。可靠而快速的光子在量子信息中具有独特的地位，如何实现光量子信息的存储是一个具有重大意义的课题。本文从光和原子系统相互作用出发讨论了如何从原子集体激发的角度来实现光子的量子存储。我们的工作主要是对以下四个方面进行了相关研究。

本文的第三章中，在介绍已有处理三能级原子系统集体激发的电磁诱导透明的量子存储问题的基础上，我们针对全同玻色 Λ 原子系统中的 EIT 系统，讨论了量子光场在玻色凝聚体中传播时的群速度问题，结果表明在强经典控制光场的作用下量子光场的传播将大幅度减慢。

第四章通过引入原子系统集体算符的方法，以二能级原子系统为例，讨论了一般意义上自由原子系统与外场相互作用时所存在的一些问题。我们的研究表明，由于原子空间运动会对原子系统集体激发带来退相干的影响，尽管利用原子系统与光场的相互作用会带来耦合强度与原子总数开方 \sqrt{N} 成指数增长的好处，我们发现这种退相干的影响也是与 \sqrt{N} 呈指数增长的。当然实验上可以通过降低温度和限制原子空间自由度来减少这种破坏作用。

第五章研究了基于 Λ 型原子晶格上的 EIT 情况，发现了其中的隐藏对称性和一系列与系统的能谱结构，研究了在这种情况下如何进行量子存储。然后将我们扩展到多模量子光场的情况，计算结果表明多模量子场在暂态情况下将会同时存在超光、正常光和慢光（负光）群速度的现象。我们进一步推广到了两光子共振 EIT 的情况，讨论了此时量子探测光场的存储和传播问题。

第六章介绍了我们首次提出的几何量子存储的概念。详细讨论了三能级原子系统近共振 EIT 系统和四能级原子系统近三光子共振 EIT 中量子光场的存储问题。

以上是我们关于原子系统集体激发用来存储光量子信息的主要研究工作。注意到随着量子点系统 [21, 22] 和约瑟夫森结超导系统 [23, 24] 等固体量子系统的发展，越来越多的证据表明在固体系统中实现量子计算可能将会是最终的选择。因为固体系统的可规模化和集成化是其他系统所无法比拟的。如果利用这些固体系统来实现对光场的控制和存储将是一个很有意义的课题。本论文对于原子系统集体激发的方法原则上应该可以借用到研究这种固体系统中去。比如，最近有一些利用约瑟夫森结超导系统中的暗态来控制微波场的理论出现 [144] 了，相关的实验很快也将会出现。另外一个方面，注意到固体激子系统中的 EIT 现象的研

究在理论上和实验上都有了一些研究 [145]。如何利用本文的方法来研究这种固体中激子的 EIT 现象也将是我们一个新的研究方向。

附录一 子系统动力学

利用子系统动力学方法求解激子系统中的光传播的解析结果:

考虑一般情况下的一个由李群 G 标识的动力学对称的物理系统。其哈密顿量的形式为:

$$H = H[G] \equiv H(g_1, g_2, \dots), \quad (\text{A.1})$$

就是说 H 是 G 中的生成元 g_1, g_2, \dots 的函数。这些生成元可以理解为系统的基本动力学参量。假定存在一个子群 $S \subset G$, 满足

$$[H, G] \subset S. \quad (\text{A.2})$$

记 s_1, s_2, \dots 是 S 的生成元。那么, 系统中 s_1, s_2, \dots 的海森堡方程为:

$$i \frac{d}{dt} s_k = [s_k, H] \in S, \quad (\text{A.3})$$

从这些方程可以看出它们形成了一个封闭的所谓子系统动力学 (sub-dynamics)。通过一个完备参数集合 $\{g_1, g_2, \dots\}$ 中的一个子集 $\{s_1, s_2, \dots\}$, 上述的子系统动力学描述了所要考虑的系统中的主要性质。

在第五章 5.2 节的激子系统中, 系统的代数结构为:

$$G = SU(2) \bar{\otimes} \Xi \otimes \Gamma, \quad (\text{A.4})$$

其中 $S = \Xi \otimes \Gamma$, Γ 是由多模光场的产生算符 a_k^\dagger 和湮灭算符 a_k 生成的 Heisenberg-Weyl 群。

附录二 绝热条件

(一) 公式 (5.26) 的推导:

一般地, 对于哈密顿量 H 由一系列随时间缓慢改变的参数 $\lambda(t)$ 决定的系统, 所要满足的绝热条件是: 给定系统中任意两个能量不简并的瞬时本征态 $|\psi_1[\lambda]\rangle$ 和 $|\psi_2[\lambda]\rangle$, 相应的瞬时本征值为 $E_1[\lambda]$ 和 $E_2[\lambda]$, 使得下式成立

$$\left| \frac{\langle \psi_1 | \partial_t | \psi_2 \rangle}{E_1 - E_2} \right| \ll 1. \quad (\text{B.1})$$

对于公式 (5.26) 的情况, 考虑的是暗态 $|d(m, n)\rangle$ 和与其不简并的集体态 $|e(m', k'; n')\rangle$ ($m' \neq k'$) 之间的绝热条件。因为

$$\partial_t D = -\dot{\theta} B, \quad Q_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + B), \quad (\text{B.2})$$

所以有

$$\begin{aligned} & \langle E(m', k'; n') | \partial_t | d(m, n) \rangle \\ &= \frac{n\dot{\theta}}{\sqrt{m'!k'!n'!n!}} \langle \mathbf{0} | D^{n'} Q_-^{k'} Q_+^{m'} (-B^\dagger) D^{\dagger n-1} | \mathbf{0} \rangle \\ &= \frac{-\delta_{n', n-1} \sqrt{n}\dot{\theta}}{\sqrt{m'!k'!}} \langle \mathbf{0} | Q_-^{k'} Q_+^{m'} B^\dagger | \mathbf{0} \rangle \\ &= \frac{-\delta_{n', n-1} \sqrt{n}\dot{\theta}}{\sqrt{m'!k'!}} (\delta_{k', 1} \delta_{m', 0} + \delta_{k', 0} \delta_{m', 1}) \langle \mathbf{0} | Q_-^{k'} Q_+^{m'} B^\dagger | \mathbf{0} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

利用

$$|\dot{\theta}| = \frac{\sqrt{Ng^2} |\Omega(t)|}{\epsilon^2}, \quad \langle \mathbf{0} | Q_{\pm} B^\dagger | \mathbf{0} \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad E(m', k') = (m' - k')\epsilon, \quad (\text{B.4})$$

因此近似地得出绝热演化条件为:

$$\left| \frac{\langle e(m', k'; n') | \partial_t | d(m, n) \rangle}{E(m', k')} \right| \sim \frac{g\sqrt{N} |\Omega(t)|}{\epsilon^3} \ll 1, \quad (\text{B.5})$$

此即公式 (5.26)。

(二) 公式 (5.135) 的推导:

因为：

$$\begin{aligned}
 & \langle e(m, k; n) | \partial_t | d_l \rangle \\
 = & \frac{1}{\sqrt{m!k!n!l!}} \langle \mathbf{0} | Q_+^m Q_-^k D^n \partial_t D^{\dagger l} | \mathbf{0} \rangle \\
 = & \frac{l}{\sqrt{m!k!n!l!}} \langle \mathbf{0} | Q_+^m Q_-^k D^n D^{\dagger(l-1)} \partial_t D^{\dagger l} | \mathbf{0} \rangle \\
 = & \frac{-l\dot{\theta}}{\sqrt{m!k!n!l!}} \langle \mathbf{0} | Q_+^m Q_-^k D^n D^{\dagger(l-1)} B^\dagger | \mathbf{0} \rangle \\
 = & \frac{-l!\dot{\theta}\delta_{n,l-1}}{\sqrt{m!k!n!l!}} \langle \mathbf{0} | Q_+^m Q_-^k B^\dagger | \mathbf{0} \rangle \\
 = & \sqrt{l}\dot{\theta}\delta_{n,l-1} [\delta_{m,0}\delta_{k,1}\sqrt{\frac{\Theta + \Delta_c}{2\Theta}} - \delta_{m,1}\delta_{k,0}\sqrt{\frac{\Theta - \Delta_c}{2\Theta}}]. \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

利用

$$|\dot{\theta}| = g\sqrt{N}|\dot{\Omega}|/\varepsilon^2, \tag{B.7}$$

根据公式 (B.1)，通过整理，可以近似得到绝热条件：

$$\frac{g\sqrt{N}(\Theta + |\Delta_c|)}{\sqrt{\Theta(\Theta - |\Delta_c|)}\varepsilon^3} |\dot{\Omega}| \ll 1, \tag{B.8}$$

此即公式 (5.135)。

参考文献

- [1] M. A. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proc. Lond. Math. Soc. (Ser. 2) **42**, 230-265 (1936).
- [2] A. Huang, Design for an optical general purpose digital computer, in 1980 International Optical Computing Conference I, W. T. Rhodes, ed., Proc. SPIE **232**, 119-127 (1980).
- [3] A. Sawchuk and T. Strand, Digital optical computing, Proc. IEEE **72**, 758-779 (1984).
- [4] John H. Reif and Akhilesh Tyagi, Efficient parallel algorithms for optical computing with the discrete Fourier transform (DFT) primitive, Applied Optics **36**(29) 7327-7340 (1997).
- [5] Leonard M. Adleman, Molecular computation of solutions to combinatorial problems, Science **266**, 1021-1024 (1994).
- [6] Wolfgang Banzhaf and Frank H. Eeckman (Eds), *Evolution and Biocomputation: Computational Models of Evolution* (Lecture Notes in Computer Science, Vol 899) (Springer, 1995).
- [7] R. P. Feynmann, Simulating physics with computers, Int. J. Theor. Phys. **21**, 467-488 (1982).
- [8] D. Deutsch Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer, Proc. R. Soc. A **400**, 97-117 (1985).
- [9] P. W. Shor, Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring, in Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Press, Los Alamitos, CA (1994).
- [10] P. W. Shor, Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory, Phys. Rev. A **52**, R2493-R2496 (1995).
- [11] L. Grover, A fast quantum mechanical algorithm for database search, in Proceedings of the 28th Annual Symposium on the Theory of Computer Science, 212-219 (1996).
- [12] Andrew Chi-Chih Yao, Quantum Circuit Complexity, in Proceedings of the 34th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (1993).
- [13] J. I. Cirac and P. Zoller, Quantum Computations with Cold Trapped Ions, Phys. Rev. Lett. **74**, 4091 (1995).
- [14] K. Zyczkowski, P. Horodecki, A. Sanpera *et al.* Volume of the set of separable states, Phys. Rev. A **58**, 883-892 (1998).

- [15] A. S. Parkins, P. Marte, P. Zoller and H. J. Kimble, Synthesis of arbitrary quantum states via adiabatic transfer of Zeeman coherence, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3095-3098 (1993).
- [16] T. Pelizzari, S. A. Gardiner, J. I. Cirac, and P. Zoller, Decoherence, continuous observation, and quantum computing: a cavity QED model, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3788-3791 (1995).
- [17] Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi and H. J. Kimble, Measurement of conditional phase shifts for quantum logic, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4710 (1995).
- [18] A. Steane, The ion-trap quantum information processor, *Appl. Phys. B* **64**, 623 (1997).
- [19] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, M. Daniell, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1345-1349 (1999).
- [20] Yoon-Ho Kim, Sergei P. Kulik, Maria V. Chekhova, Warren P. Grice, Yanhua Shih, Experimental Entanglement Concentration and Universal Bell-state Synthesizer, *Phys. Rev. A* **67**, 010301(R) (2003).
- [21] D. Loss and D. DiVincenzo, Quantum computation with quantum dots, *Phys. Rev. A* **57**, 120 (1998).
- [22] K. R. Brown, D. A. Lidar, B. B. Whaley, Quantum computing with quantum dots on quantum linear supports, *Phys. Rev. A* **65**, 012307 (2002).
- [23] J. E. Mooij, T. P. Orlando, L. Levitov, L. Tian, C. H. van der Waal and S. Lloyd, Josephson persistent-current qubit, *Science* **285**, 1036 (1999).
- [24] S. Han, Y. Yu, X. Chu *et al.*, Time-resolved measurement of dissipation-induced decoherence in a Josephson junction, *Science*, **293**, 1457-1459 (2001).
- [25] 孙昌璞, 李勇, 刘旭峰, 基于量子系综的准自旋波激发的量子存贮研究, *物理* **33**, 193 (2004).
- [26] 郭光灿, 量子信息引论, *量子力学新进展(第一辑)*, 曾谨言, 裴寿镛主编 (北京大学出版社, 2000) p. 249-285.
- [27] W. K. Wootters, W. H. Zurek, A single quantum cannot be cloned, *Nature* **299**, 802-803 (1982).
- [28] L.-M. Duan and G.-C. Guo, Probabilistic cloning and identification of linearly independent quantum states, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4999-5002 (1998).
- [29] C. H. Bennett and G. Brassard, Quantum cryptography: public key distribution

- and coin tossing, in proc IEEE int. conf. on Computers System, and Signal Processing, Bangalore (IEEE, New York, 1984) p. 175.
- [30] Charles H. Bennet, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres and William K. Wootters, Teleportation an unknown quantum state via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895-1899 (1993).
 - [31] Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Klaus Mattle, Manfred Eibl, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Experimental quantum teleportation, *Nature* **390**, 575-579 (1997).
 - [32] Samuel L. Braunstein and H. J. Kimble, Teleportation of continuous quantum variables, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869-872 (1998).
 - [33] A. Furusawa, Unconditional quantum teleportation, *Science* **282**, 706 (1998).
 - [34] Yoon-Ho Kim, Sergei P. Kulik, and Yanhua Shih, Quantum teleportation of a polarization state with a complete Bell state measurement, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1370-1373 (2001).
 - [35] C. P. Sun, P. Zhang, and Y. Li, Geometric quantum information storage based on atomic ensemble, [quant-ph/0311052](#).
 - [36] Y. Li, P. Zhang, P. Zanardi, and C. P. Sun, Non-Abelian geometric quantum memory with atomic ensemble, [quant-ph/0402177](#).
 - [37] J. M. Taylor, C. M. Marcus, and M. D. Lukin, Long-lived memory for mesoscopic quantum bits, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 206803 (2003).
 - [38] M. Fleischhauer and M. D. Lukin, Dark-State Polaritons in Electromagnetically Induced Transparency, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5094 (2000).
 - [39] M. Fleischhauer and M. D. Lukin, Quantum memory for photons: Dark-state polaritons, *Phys. Rev. A* **65**, 022314 (2002).
 - [40] M. D. Lukin, S. F. Yelin, and M. Fleischhauer, Entanglement of atomic ensembles by trapping correlated photon states, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4232 (2000).
 - [41] C. Mewes and M. Fleischhauer, Two-photon linewidth of light "stopping" via electromagnetically induced transparency, *Phys. Rev. A* **66**, 033820 (2002).
 - [42] S. E. Harris, Electromagnetically induced transparency, *Phys. Today* **50**(7), 36 (1997).
 - [43] M. V. Berry, Quantal phase factors accompanying adiabatic changes, *Proc. R. Soc. London A* **392**, 45 (1982).
 - [44] C. Liu, Z. Dutton, C. H. Behroozi, L. V. Hau, Observation of coherent optical

- information storage in an atomic medium using halted light pulses, *Nature* **409**, 490-493 (2001).
- [45] M. D. Lukin and A. Imamoglu, Controlling photons using electromagnetically induced transparency, *Nature* **413**, 273-276 (2001).
- [46] L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, and C. H. Behroozi, Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas, *Nature* **397**, 594-598 (1999).
- [47] Jing Zhang, Kunchi Peng, and Samuel L. Braunstein, Quantum-state transfer from light to macroscopic oscillators, *Phys. Rev. A* **68**, 013808 (2003).
- [48] J. Wang, Y. Zhu, K. J. Jiang, and M. S. Zhan, Bichromatic electromagnetically induced transparency in cold rubidium atoms, *Phys. Rev. A* **68**, 063810 (2003).
- [49] U. Fano, Effects of configuration interaction on intensities and phase-shifts, *Phys. Rev.* **124**, 1866 (1961).
- [50] R. B. Madden, and K. Codling, Two-electron excitation states in helium, *Astrophys. J.* **141**, 364 (1965).
- [51] K. Maschke, P. Thomas, and E. O. Göbel, Fano interference in Type-II semiconductor quantum-well structures, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2646 (1991).
- [52] O. Kocharovskaya, Amplification and lasing without inversion, *Phys. Rep.* **219**, 175 (1992).
- [53] H. I. Yoo, and J. H. Eberly, Dynamical theory of an atom with two or three levels interacting with quantized cavity fields, *Phys. Rep.* **118**, 239 (1985).
- [54] B. W. Shore, *Theory of Coherent Atomic Excitation*, (New York: Wiley, 1990).
- [55] P. L. Knight, M. A. Lauder, and B. J. Dalton, Laser induced continuum structure, *Phys. Rep.* **190**, 1 (1990).
- [56] S. E. Harris, J. E. Field, and A. Imamoglu, Non-linear optical processes using electromagnetically induced transparency, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1107 (1990).
- [57] H. Y. Ling, Y. Li, and M. Xiao, Coherent population trapping and electromagnetically induced transparency in multi-Zeeman-sublevel atoms, *Phys. Rev. A* **53**, 1014-1026 (1996).
- [58] M. O. Scully, Enhancement of the index of refraction via quantum coherence, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1855 (1991).
- [59] M. O. Scully, From lasers and masers to phaseonium and phasers, *Phys. Rep.* **219**, 191 (1992).
- [60] J. P. Marangos, Topical review electromagnetically induced transparency, *Journal of Modern Optics* **45**(3), 471 (1998).

- [61] J. R. Boon, E. Zekou, D. McGloin, and M. H. Dunn, Comparison of wavelength dependence in cascade-, Lambda-, and Vee-type schemes for electromagnetically induced transparency, *Phys. Rev. A* **59**, 4675-4684 (1999).
- [62] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, (Cambridge University Press, 1997).
- [63] I. V. Zelensky and V. A. Mironov, Electromagnetically induced transparency in degenerate two-level systems, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **94**(5), 916-926 (2002).
- [64] Y. Gu, Q. Sun, and Q. Gong, Quantum coherence in a degenerate two-level atomic ensemble for a transition $Fe=0 \leftrightarrow Fg=1$, *Phys. Rev. A* **67**, 063809 (2003).
- [65] M. Kozuma, D. Akamatsu, L. Deng, E. W. Hagley, and M. G. Payne, Steep optical-wave group-velocity reduction and "storage" of light without on-resonance electromagnetically induced transparency, *Phys. Rev. A* **66**, 031801(R) (2002).
- [66] L. Deng, E. W. Hagley, M. Kozuma, and M. G. Payne, Optical-wave group-velocity reduction without electromagnetically induced transparency, *Phys. Rev. A* **65**, 051805(R) (2002).
- [67] R. G. Unanyan, B. W. Shore, and K. Bergmann, Laser-driven population transfer in four-level atoms: Consequences of non-Abelian geometrical adiabatic phase factors. *Phys. Rev. A* **59**, 2910-2919 (1999).
- [68] L. Deng, M. G. Payne, and W. R. Garrett, Four-wave mixing with short pulses and optimized atomic coherence, *Phys. Rev. A* **63**, 043811 (2001).
- [69] Y. Wu, J. Saldana, and Y. Zhu, Large enhancement of four-wave mixing by suppression of photon absorption from electromagnetically induced transparency, *Phys. Rev. A* **67**, 013811 (2003).
- [70] L. Deng and M. G. Payne, Inhibiting the onset of the three-photon destructive interference in ultraslow propagation-enhanced four-wave mixing with dual induced transparency, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 243902 (2003).
- [71] Olga Kocharovskaya, Yuri Rostovtsev, and Marlan O. Scully, Stopping light via hot atoms, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 628-631 (2001).
- [72] M. G. Payne and L. Deng, Quantum entanglement of Fock states with perfectly efficient ultraslow single-probe photon four-wave mixing, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 123602 (2003).
- [73] Le-Man Kuang, Guang-Hong Chen, Yong-Shi Wu, Giant non-linearities accompanying electromagnetically induced transparency, [quant-ph/0103152](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0103152).

- [74] L. Deng, M. G. Payne, and W. R. Garrett, Electromagnetically-induced-transparency-enhanced Kerr nonlinearity: Beyond steady-state treatment, *Phys. Rev. A* **64**, 023807 (2001).
- [75] Y. Kaluzny, P. Goy, M. Gross, J. M. Raimond, and S. Haroche, Observation of self-induced Rabi oscillations in two-level atoms excited inside a resonant cavity: The ringing regime of superradiance, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1175-1178 (1983).
- [76] R. Bonifacio and L. A. Lugiato, Cooperative radiation processes in two-level systems: Superfluorescence. II, *Phys. Rev. A* **12**, 587-598 (1975).
- [77] S. Bose, Planks gesetz und Lichtquantenhypothese, *Z. Phys.* **26**, 178-181 (1924).
- [78] M. Anderson, J. Ensher, M. Matthews *et al.*, Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor, *Science* **269**, 198-201 (1995).
- [79] K. Davis, M. O. Mewes, M. Andrews *et al.*, Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969-3972 (1995).
- [80] C. Bradley, C. Scakett, J. Tollett *et al.*, Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687-1690 (1995).
- [81] S. Inouye, R. F. Loew, S. Gupta *et al.*, Amplification of light and atoms in a Bose-Einstein condensate, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4225-5228 (2000).
- [82] E. L. Hahn, Spin echoes , *Phys. Rev.* **80**, 580 (1950).
- [83] I. D. Abella, N. A. Kurnit, and S. R. Hartmann, *Phys. Rev.* **141**, 391 (1966).
- [84] T. W. Mossberg, Time-domain frequency-selective optical data storage, *Opt. Lett.* **7**, 77 (1982).
- [85] N. W. Carlson, L. J. Rothberg, A. G. Yodh, W. R. Babbitt, and T. W. Mossberg, Storage and time reversal of light pulses using photon echoes, *Opt. Lett.* **8**, 483-485 (1983).
- [86] P. R. Hemmer, K. Z. Cheng, J. Kierstead, M. S. Shariar, and M. K. Kim, Time-domain optical data storage by use of Raman coherent population trapping, *Opt. Lett.* **19**, 296-298 (1994).
- [87] K. Bergmann, H. Theuer, and B. W. Shore, Coherent population transfer among quantum states of atoms and molecules, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 1003-1025 (1998).
- [88] H. J. Kimble, Strong interactions of single atoms and photons in cavity QED, *Physica Scripta*, **76**, 127-137 (1998).
- [89] D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, R. L. Walsworth and M. D. Lukin, Storage of light in atomic vapor, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 783-786 (2001).
- [90] S. E. Harris, L. V. Hau, Nonlinear optics at low light levels, *Phys. Rev. Lett.* **82**,

- 4611-4614 (1999).
- [91] M. D. Lukin, M. Fleischhauer, A. S. Zibrov, H. G. Robinson, V. L. Velichansky, L. Hollberg, and M. O. Scully, Spectroscopy in dense coherent media: Line narrowing and interference effects, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2959-2962 (1997).
 - [92] R. H. Dicke, Coherence in spontaneous radiation processes, *Phys. Rev.* **93**, 99-110 (1954).
 - [93] L.-M. Duan, M. D. Lukin, J. I. Cirac, P. Zoller, Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics, *Nature* **414** 413-418 (2001).
 - [94] A. Kuzmich, W. P. Bowen, A. D. Boozer, A. Boca, C. W. Chou, L.-M. Duan, H. J. Kimble, Generation of nonclassical photon pairs for scalable quantum communication with atomic ensembles, *Nature* **423**, 731-734 (2003).
 - [95] C. H. van der Wal, M. D. Eisaman, A. André, R. L. Walsworth, D. F. Phillips, A. S. Zibrov, and M. D. Lukin, Atomic memory for correlated photon states, *Science* **301**, 196-200 (2003).
 - [96] M. D. Lukin, M. Fleischhauer, M. O. Scully, and V. L. Velichansky, Intracavity electromagnetically induced transparency, *Opt. Lett.* **23**, 295-297 (1998).
 - [97] Kaige Wang, Fanglin Peng and Guojian Yang, Stopping and storing a light pulse in an ultracold atomic medium, *J. Opt. B* **5**, 44-51 (2003).
 - [98] 孙昌璞, 王颖丹, 李勇, 张朋, 微腔量子电动力学的基本概念和方法, 量子力学新进展(第三辑), 曾谨言, 龙桂鲁, 裴寿镛主编 (清华大学出版社, 2003).
 - [99] L.-M. Kuang and L. Zhou, Generation of atom-photon entangled states in atomic Bose-Einstein condensate via electromagnetically induced transparency *Phys. Rev. A* **68**, 043606 (2003).
 - [100] Z. Dutton, L.V. Hau, Storing and processing optical information with ultra-slow light in Bose-Einstein condensates, [quant-ph/0404018](#).
 - [101] Chang-Pu Sun, Sixia Yu, and Yi-Bao Gao, Gardiner's phonon for Bose-Einstein Condensation: A physical realization of the q -deformed Boson, [quant-ph/9809079](#).
 - [102] 金光日, 多原子系统集体激发及其辐射性质的研究, 中国科学院理论物理研究所博士学位论文 (2002).
 - [103] C. W. Gardiner, Particle-number-conserving Bogoliubov method which demonstrates the validity of the time-dependent Gross-Pitaevskii equation for a highly condensed Bose gas, *Phys. Rev. A* **56**, 1414-1423 (1997).
 - [104] C. P. Sun and H. C. Fu, The q -deformed Boson realization of the quantum group $SU_q(n)$ and its representations, *J. Phys. A* **22**, L873-L986 (1989).

- [105] J. M. Li, C. P. Sun, The Q-deformed Lipkin-Meshkov-Glick model for many-fermion systems with the quantum symmetry of $SU(Q)(2)$, Phys. Lett. A **180**, 50-55 (1993).
- [106] Yu-Xi Liu, C. P. Sun, S. X. Yu, and D. L. Zhou, Semiconductor-cavity QED in high-Q regimes with q-deformed bosons, Phys. Rev. A **63**, 023802 (2001).
- [107] Jun-ichi Inoue, Tobias Brandes, and Akira Shimizu, Renormalized bosonic interaction of excitons, Phys. Rev. B **61**, 2863-2873 (2000).
- [108] G. Rempe, F. Schmidt-Kaler, and H. Walther, Observation of sub-Poissonian photon statistics in a micromaser, Phys. Rev. Lett. **64**, 2783-2786 (1990).
- [109] A. Kuzmich, L. Mandel, and N. P. Bigelow, Generation of Spin Squeezing via Continuous Quantum Nondemolition Measurement, Phys. Rev. Lett. **85**, 1594-1597 (2000).
- [110] B. Julsgaard, A. Kozhekin, and E. S. Polzik, Experimental long-lived entanglement of two macroscopic objects Nature 413, 400-403 (2001).
- [111] C. P. Sun, S. Yi, and L. You, Decoherence of collective atomic spin states due to inhomogeneous coupling, Phys. Rev. A **67**, 063815 (2003).
- [112] C. P. Sun, X. F. Liu, D. L. Zhou, and S. X. Yu, Localization of a macroscopic object induced by the factorization of internal adiabatic motion, Euro. J. Phys. D **17**, 85-92 (2001).
- [113] G. S. Agarwal, D. H. Feng, L. M. Narducci, R. Gilmore, and R. A. Tuft, Atomic coherent-state representation of the spectrum of scattered light from a cooperative system and numerical results, Phys. Rev. A **20**, 2040-2046 (1979).
- [114] M. Kitagawa and M. Ueda, Squeezed spin states, Phys. Rev. A **47**, 5138-5143 (1993).
- [115] J. H. Eberly, N. B. Narozhny, and J. J. Sanchez-Mondragon, Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model, Phys. Rev. Lett. **44**, 1323-1326 (1980).
- [116] Y. Li, S. Yi, L. You, and C. P. Sun, Quantum leakage of collective excitations of atomic ensemble induced by spatial motion, Science in China (Series G), **46**, 580-588 (2003).
- [117] T. Prosen, T. H. Seligman, Decoherence of spin echoes, J. Phys. A **35**, 4707-4727 (2002).
- [118] C. P. Sun, Y. Li, and X. F. Liu, Quasi-spin wave quantum memories with dynamic symmetry, Phys. Rev. Lett. **91**, 147903 (2003).

- [119] M. A. Shifman, *Particle Physics and Field Theory* (World Scientific, Singapore, 1999), p. 775.
- [120] A. Zee, Non-Abelian gauge structure in nuclear quadrupole resonance, Phys. Rev. A **38**, 1-6 (1988).
- [121] Chang-Pu Sun, High-order adiabatic approximations related to non-Abelian Berry's phase factors and nuclear quadrupole resonance, Phys. Rev. D **41**, 1318-1323 (1990).
- [122] Y. Li, X. F. Liu, C. P. Sun, Transient dynamics of light propagation in EIT medium and hidden symmetry of multi-bit quantum memory, quant-ph/0306170.
- [123] L. J. Wang, A. Kuzmich, and A. Dogariu, Gain-assisted superluminal light propagation, Nature **406**, 277-279 (2000).
- [124] A. Dogariu, A. Kuzmich, and L. J. Wang, Transparent anomalous dispersion and superluminal light-pulse propagation at a negative group velocity, Phys. Rev. A **63**, 053806 (2001).
- [125] Robert. W. Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic Press, INC., 1992), p. 219.
- [126] Pierre Meystre and Murray Sargent III, *Elements of Quantum Optics*, (Springer-Verlag World Publishing Corp, New York, 1990).
- [127] Y. Li, C. P. Sun, Group velocity of a probe light in an ensemble of Λ -atoms under two-photon resonance, Phys. Rev. A **69**, 051802(R) (2004).
- [128] Y. Li and C. P. Sun, Quantum memory based on Λ -atoms ensemble with two-photon resonance EIT, quant-ph/0402175.
- [129] M. D. Lukin, Colloquium: Trapping and manipulating photon states in atomic ensembles, Rev. Mod. Phys. **75**, 457-472 (2003).
- [130] E. E. Mikhailov, Y. V. Rostovtsev, G. R. Welch, Group velocity study in hot Rb vapor with buffer gas, quant-ph/0309173.
- [131] A. Godone, F. Levi, and S. Micalizio, Propagation and density effects in the coherent-population-trapping maser, Phys. Rev. A **65**, 033802 (2002).
- [132] Xiong-Jun Liu, Hui Jing, Mo-Lin Ge, Quantum memory for light in a double lambda atomic ensemble, quant-ph/0403171.
- [133] F. Wilczek and A. Zee, Appearance of gauge structure in simple dynamical systems, Phys. Rev. Lett. **52**, 2111-2114 (1984).
- [134] P. Zanardi, M. Rasetti, Holonomic quantum computation, Phys. Lett. A **264**, 94 (1999).
- [135] J. A. Jones, V. Vedral, A. Ekert, and G. Castagnoli, Geometric quantum compu-

- tation using nuclear magnetic resonance, *Nature* **403**, 869-871 (2000).
- [136] L.-M. Duan, J. I. Cirac, and P. Zoller, Geometric manipulation of trapped ions for quantum computation, *Science* **292**, 1695-1697 (2001).
- [137] G. Falci, R. Fazio, G. M. Palma, J. Siewert, and V. Vedral, Detection of geometric phases in superconducting nanocircuits, *Nature* **407**, 355-358 (2000).
- [138] Shi-Liang Zhu and Z. D. Wang, Implementation of universal quantum gates based on nonadiabatic geometric phases, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 097902 (2002).
- [139] Jiangfeng Du, Ping Zou, Mingjun Shi *et al.*, Observation of Geometric Phases for Mixed States using NMR Interferometry, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 100403 (2003).
- [140] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin, and H. Weinfurter, Elementary gates for quantum computation, *Phys. Rev. A* **52**, 3457-3467 (1995).
- [141] G. R. Jin, P. Zhang, Yu-xi Liu, and C. P. Sun, Superradiance of low-density Frenkel excitons in a crystal slab of three-level atoms: The quantum interference effect, *Phys. Rev. B* **68**, 134301 (2003).
- [142] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, Quantum information and computation, *Nature* **404**, 247-255 (2000).
- [143] J. Pachos, P. Zanardi, M. Rasetti, Non-Abelian Berry connections for quantum computation, *Phys. Rev. A* **61**, 010305(R) (2000).
- [144] C.-P. Yang, S.-I. Chu, and S. Han, Quantum information transfer and entanglement with SQUID qubits in cavity QED: A dark-state scheme with tolerance for nonuniform device parameter, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 117902 (2004).
- [145] K.-D. Zhu, W.-S. Li, Electromagnetically induced transparency mediated by phonons in strongly coupled exciton-photon systems, *Appl. Phys. B* **75**, 861-864 (2002).

博士研究生期间发表和完成的论文

1. Y. Li and C. P. Sun, Group velocity of a probe light in an ensemble of Λ -atoms under two-photon resonance, Phys. Rev. A (Rapid Communications) **69**, 051802(R) (2004).
2. C. P. Sun, Y. Li, and X. F. Liu, Quasi-spin wave quantum memories with dynamic symmetry, Phys. Rev. Lett. **91**, 147903 (2003).
3. Y. Li and C. P. Sun, Quantum memory based on Λ -atoms ensemble with two-photon resonance EIT, Europ. Phys. Journal D (accepted), (quant-ph/0402175).
4. Y. Li, P. Zhang, P. Zanardi, and C. P. Sun, Non-Abelian geometric quantum memory with atomic ensemble, Phys. Rev. A (accepted), (quant-ph/0402177).
5. Y. Li, L. J. Wu, X. W. Zhu, and K. L. Gao, Calculation of the isotope shifts on $5S_{1/2} \rightarrow 4D_{3/2,5/2}$ transitions of $^{87,88}Sr^+$, Commun. Theor. Phys. **37**, 706 (2002).
6. Y. Li, S. Yi, L. You, and C. P. Sun, Quantum leakage of collective excitations of atomic ensemble induced by spatial motion, Science in China (Series G), **46**, 580-588 (2003); 李勇, 易俗, 尤力, 孙昌璞, 空间运动对原子系综量子比特的影响, 中国科学 (G 辑), **33**, 272-280 (2003).
7. Y. X. Miao and Y. Li, Controlled coherent quantum tunnelling of atomic ensembles, Commun. Theor. Phys. **39**, 109 (2003).
8. 孙昌璞, 王颖丹, 李勇, 张朋, 微腔量子电动力学的基本概念和方法, 量子力学新进展(第三辑), 曾谨言, 龙桂鲁, 裴寿镛主编 (清华大学出版社, 2003).
9. 孙昌璞, 李勇, 刘旭峰, 基于量子系综的准自旋波激发的量子存贮研究, 物理 **33**, 193 (2004).
10. Y. Li, Y. X. Miao, and C. P. Sun, Adiabatic passage of collective excitations in atomic ensembles, Commun. Theor. Phys. **42**, 27-32 (2004).

11. Y. Li, X. F. Liu, and C. P. Sun, Transient dynamics of light propagation in EIT medium and hidden symmetry of multi-bit quantum memory, quant-ph/0306170.
12. C. P. Sun, P. Zhang, and Y. Li, Geometric quantum information storage based on atomic ensemble, quant-ph/0311052.
13. P. Zhang, Y. Li, C. P. Sun, and L. You, Non-adiabatic effects of atomic motion inside a high Q optical cavity, quant-ph/0401012.
14. P. Zhang, Y. Li, and C. P. Sun, Induced magnetic monopole from trapped Lambda-type atom, quant-ph/0404108. .

致 谢

本文是在我的导师孙昌璞研究员的悉心指导下完成的。孙老师严谨的科研态度、扎实的理论功底和敏锐的洞察力给我留下了深刻的印象，也深深地影响了我。是三年来孙老师对我学习工作的精心指导和生活上的无私关怀才使我的论文得以顺利完成。在此我表示由衷的感谢。

衷心感谢尤力教授对我的关怀和帮助。尤老师渊博的知识和敏锐的物理直观给我留下了深刻的印象。

感谢吴颖老师、刘旭峰老师、匡乐满老师和史华林老师对我的关怀和帮助。

感谢我的师兄弟们：张朋、周端陆、高一波、王颖丹、金光日、李崇、苗元秀、全海涛、刘夏姬、钟灵，感谢他们在学习和生活中给与我的诸多帮助。特别是我的师兄张朋，三年来他对我工作和生活上的帮助使我受益非浅。

感谢郭玲老师和理论物理所全体工作人员对我学习、工作和生活方面的关怀和帮助。

感谢所里的同学：王楠、李建涛、昌俊、涂展春、赵继泽、文渝川、熊爱民、甘景玉、贺晓涛、苏跃华、黎明、李晋斌、黄庆国、周先荣、周勇、张勇、刘鑫、柳飞、牟维华等等。和他们一起在理论物理所度过的美好岁月，使我终生难忘。