·书评和书讯·

质朴无华、境界臻纯

——评孙洪洲、韩其智《李代数、李超代数及在物理学中的应用》

孙 昌 璞

(中国科学院理论物理研究所 北京 100080)

对称性的概念在近代物理学,特别是量子物理学的发展中是至关重要的. 著名物理学家杨振宁在《量子化、对称和相因子》一文中指出,“如果我们把20世纪物理学发展当作一个交响乐,就会发现有几个重要的现象连续不断地出现,与这些现象交织在一起的一些基本观念,构成了20世纪物理学发展的主旋律”[1]. 杨振宁先生提及的三个主旋律之一,就是“对称”的观念. 研究对称性的基本数学工具是群论和群表示理论[2]. 自 Weyl 和 Wigner 以后,这方面的研究已取得长足的发展,特别是在六七十年代,粒子物理中夸克模型和弱电统一模型的成功充分展示了对称性考虑的巨大威力,大大拓宽了群及其表示理论的研究领域. 在这个现代物理学发展的主流方向上,追求引力和弱电的进一步统一,又导致了超对称的概念的提出,相应的李超代数及其表示理论应运而生[3]. 后来,超弦理论的研究[4]热潮大大激发了物理学家大统一的梦想,而超弦理论的数学结构也是植根于超对称及其李超代数表示理论. 正是在这样的现代物理学发展背景下,孙洪洲教授和韩其智教授集他们多年研究工作的心得和研究生课程教学经验于一体,在北京大学出版社出版了《李代数、李超代数及在物理学中的应用》一书[5],可以说是适逢其时.

《李代数、李超代数及在物理学中的应用》一书的写作风格定位于研究生教材和学术专著之间,具有深入浅出的明显特征:虽然不像纯数学专著那样,拘泥于一步一板的详细证明,但却自始至终强调数学逻辑的严谨性,并且丝毫不忽视对数学观念整体的理解. 例如,在介绍李超代数概念时,它从阶化代数和阶化空间的最初始概念出发,使得人们能在较短的篇幅内,对现代代数学的新观念有一个直接而明晰的了解. 本书采用的这种叙述方法在国内外同类专著和研究生教材中是少见的. 仅仅为了在物理中应用的需要,物理学家用的群论(包括李代数、李超代数)专著和教材在定义李超代数时,通常是通过与李代数的对易关系简单的类比,直接引入反对易关系. 这种表述不仅使读者颇有唐突之感,而且会使人们因此不能深入了解李超代数的数学根源.《李代数、李超代数及在物理学中的应用》一书彻底克服了这一表述的弱点,兼顾了表述的物理直观性和数学观念上的系统性.

本书的篇章结构的安排,看上去是很平常的:从概念定义出发,按部就班地讲到具体例子和表示理论. 但是,从素材取舍上可以看出作者们独具匠心的整体安排和煞费苦心的具体努力. 对于物理中没有直接应用的观念和定理,其表述虽然常常是一带而过,但对与现代物理有密切联系的部分,总是不厌其烦地列举各种示例.

本书中一个最具特色的亮点是利用不可约张量的方法去统一地构造半单李代数和李超代数的不可约表示. 在通常的数学著作中,人们只关心李代数和李超代数表示的性质和特征,并不十分关注其表示的具体形式和构造方法. 然而,被忽视的后者正是物理学关心的中心议题. 在量子物理中,应用物理体系的波函数构造李代数和李超代数的表示空间,是群论应用于物理的首要任务和目标. 根据 Weyl 和 Wigner 发展的理论,当一个物理系统具有群 G 描述的完全对称性(G 是与体系哈密顿量对易的幺正算符的最大集合),体系的能谱(哈密顿量的本征值完全集)就可以根据 G 的不可约表示加以完整的分类. 相应地,体系的可观察物理量——厄米算符也可以应用群的不可约表示加以分类. 按某个给定的不可约表示变换的物理量,被称为不可约张量. 因此,描写具体物理过程的物理量矩阵元的计算,就归结为不可约张量算符矩阵元的计算. 而 Wigner-Ekart 定理给出了计算不可约张量算符矩阵元的简化方法. 其美妙之处在于把这种矩阵元计算分解为两部分的乘积,其第一部分是“对称性部分”,由群 G 表示直积分解的克莱布什-高登系数(CG系数)决定,它依赖于群 G 表示的权矢量;而第二部分称为

约化矩阵元,仅依赖于表示的最高权和力学量的动力学性质.在物理学中直接应用这个定理,从CG系数是否为零(不需要具体计算约化矩阵元),就可以直接给出跃迁选择定则.

从20世纪60年代起,孙洪洲教授和韩其智教授把Wigner-Ekart定理应用到秩2李代数不可约表示的计算,并进而推广到一般情况.特别是80年代以后,他们进一步把这个思想应用到李超代数情况,取得了一系列有意义的结果.本书贯穿始终,全面系统地描述了他们用张量基求半单李代数和半单李超代数不可约表示的思想与方法,为不同类型的读者提供了一个可以进一步学习、应用这种方法构造群表示,研究相关物理问题的基本平台.

为了直观地描述构造群表示张量基方法的基本精神,我们以李代数 $SP(4)$ 的不可约表示为例,对此稍加详细地讨论. $SP(4)$ 李代数也称 C_2 李代数,其秩为2,包含了两个相互对易的 $SO(3)$ 李代数.根据 C_2 其他基矢量(生成元)与两个 $SO(3)$ 的对易关系,可以把这些额外的基矢用 $SO(3)$ 的不可约表示加以分类,表达为 $SO(3)\times SO(3)$ 的不可约张量.可以在 $SO(3)\times SO(3)$ 的不可约张量表示的空间上计算这些额外生成元的矩阵元,从而得到 $SP(4)$ 的各种不可约表示.在计算这些矩阵元时,一个极为重要的技巧是应用Wigner-Eckart定理,其中约化矩阵元计算应分为两种情况:(1)简单可约情况:两个不可约表示的直乘分解为不可约表示的直和,每个不可分解表示只出现一次,或称重复度为1;(2)非简单可约情况:直积分解的重数大于1.对于简单可约情况,CG系数满足的递推关系给出了计算CG系数的一个线性方程组,适当规定相因子("相规约"问题),原则上可以把CG系数完全确定下来.而对非简单可约情况,问题会变得比较复杂,原则上可以通过计算约化标量因子加以解决.对于李代数 C_2,孙洪洲教授在80年代给出了约化标量因子的解析表达式.《李代数、李超代数及其在物理学中的应用》一书针对这两种情况,阐述了孙洪洲教授本人计算约化标量因子的基本思想.

在物理应用方面,本书没有泛泛地去讨论包括各种支节的许许多多具体问题,而是把注意力集中在物理应用中的一两个核心问题.在第六章,作者集中篇幅介绍了利用李代数表示论中的不可约张量基方法构造全同粒子体系的波函数的基本方法.大家知道,中心力场中全同粒子运动是一个十分典型的物理问题.构造中心力场中全同粒子体系的波函数是多体问题研究的一个重要方面,其理论在原子分子物理、核物理乃至凝聚态物理中有许多具体的应用.自30年代起,它一直是群论在物理应用研究中人们十分关注的重要问题.一方面,全同粒子运动必须满足不可辨原理、全同粒子的波函数必须具有交换对称性;另一方面,中心力场的转动不变性,要求粒子波函数必须具有确定角动量,按照 $SO(3)$ 群的特定的不可约表示变换.当多个粒子在中心力场中运动时,转动不变性的要求仍然会限制多体波函数性质,要求其总角动量有一个确定的值.用群论的语言说,我们要从单粒子角动量波函数去"耦合"出 n 粒子具有确定总角动量多体波函数.因此,我们在构造中心力场全同粒子波函数时,必须同时满足上述的转动不变性和交换对称性两个要求.

解决这个问题的传统方法有二:一是所谓M-Sheme法,即先一般地写下具有确定总角动量投影的对称化或反对称化波函数(但总角动量并不总是确定的),并以此作为基矢,构造同时满足转动不变性要求并具有确定总角动量的多粒子波函数.从最高权态出发,可以通过总体升降算子生成最终的结果;二是所谓的J-T Scheme法,其中心思想是直接应用角动量耦合方法,逐一得到一个同时具有确定的总角动量 J 及其投影 M 的"超完备"的空间.满足交换对称性的波函数,只是形成了其中的一个交换不变子空间.因此,可以应用标准的子空间投影技术,投影出同时满足交换对称性和转动不变性双重要求的波函数.这两种方法是相当直观的,易为读者所接受,但缺点是所需的组态空间太大,即使通过计算机程序,具体计算也是相当困难的.

《李代数、李超代数及其在物理学中的应用》一书系统地阐述了构造中心力场中全同粒子波函数的一种现代方法——二次量子化方法(或称玻色-费米子实现方法).这个方法不仅兼顾了上述两种方法的优点,而且由于采用了粒子数表象,交换对称性自动保持,使得具体解析计算变得十分方便.众所周知,在二次量子化表象下,任何一个由单粒子角动量算子构成的总角动量算子,可以写成单态角动量产生、消灭算子 b_m^+ 和 b_m ($m=1,2,\cdots,n$)的二次型,其中每一个分量 $b_m^+b_n$ 可以作为特定李群 G 的生成元.在玻色子情况下,这些由产生、消灭算子构成的分量 $b_m^+b_n$,是 $U(n)$ 群的生成元.因此,我们可以根据 $U(n)$ 子群链[如 $U(n)\supset SO(n)\supset SO(3)$]的约化,对产生、消灭算子及其组合的不可约张量性质加以分类.例如,单态的产生算子 b_m^+ 和消灭算子的变形 $\tilde{b}_m=$

$(-1)^{j+m}b_m$ 可以视为 $SO(3)$ 群 j 秩不可约张量算子. 计算它们的矩阵元,可以依据 Wigner-Eckart 定理通过约化矩阵元统一地进行. 有意思的是,产生算子 b_m^+ 的归一化的约化矩阵元恰好是 J-T Scheme 法中的母分系数(coefficients of fractional parentage, CFP). 作为具有确定总角动量及其投影的对称化波函数相对于只具有确定总角动量及其投影非对称化波函数进行展开的展开系数,后者(CFP)是计算中心场中全同粒子波函数所必需的. 由于在二次量子化表象中,产生消灭算子二次型分量 $b_m^+ b_n$, $b_m b_n$ 和 $b_m^+ b_n^+$ (包括粒子数不守恒的项)生成了不同的群链,我们也可以视 b_m^+ 等为相应群的不可约张量算子,从而会使母分系数的计算大大简化.

本书的第二个物理应用是关于第一类点群约化问题的阐述. 作为 $SO(3)$ 群的有限子群,第一类点群的不可约表示可以从 $SO(3)$ 群的不可约表示约化出来. 这是通常群论教科书中较多讨论的议题,是群论应用于物理的一个典型例子. 在具有点群对称性的微扰作用下,中心力场粒子的能谱发生劈裂. 无须进行任何动力学的矩阵元计算,人们就可以通过群论的方法预言这种劈裂的详细情况. 然而,本书并没有拘泥于这种具体的问题,而是更加深入地讨论了子群直积约化技术中 Wigner-Eckart 定理的作用以及点群直积约化中的"相规约"问题. 大家知道, $SO(3)$ 群两个不可约表示的直积可以约化为其不可约表示的直和. 相应群表示基矢的约化系数可以由一组正交归一化条件确定的线性方程组决定. 然而,这些方程组允许约化系数相差一个相因子. 可以通过惯例规定相因子. 由于第一类点群是 $SO(3)$ 子群,其直积约化必须与 $SO(3)$ 有统一的位相规定(相规约),从而使基于 Wigner \ | Eckart 定理的矩阵元计算有上下一致的正确性. 这方面讨论在很多群论教科书和专著中没有充分地强调,但《李代数、李超代数及其在物理学中的应用》一书却深入细致地阐述了这个问题.

通过以上两个物理应用例子的选择可以看出,《李代数、李超代数及其在物理学中的应用》一书在物理应用方面的安排的确是独具风格的. 这种素材取舍方式充分体现了作者对群论应用的微妙之处有着精湛的理解. 这正是作者几十年如一日,持之以恒从事群论应用的研究工作,追求至真至纯的研究风格所积累的结果. 总而言之,这本书涉及到的李(超)代数及其表示理论在物理学中应用的具体论题,不仅适合物理学工作者阅读,而且代表了这一重要科学领域的主流结果.

参 考 文 献

[1] 杨振宁. 量子化、对称和相因子 —— 二十世纪物理学发展的主旋律. 见:路甬祥编. 百年科技回顾与展望. 上海:上海教育出版社,2002

[2] Loebl E M ed. Group Theory and its Applications. Vols. I, II, III. New York: Academic Press, 1975

[3] Cornwell J F. Group Theory in Physics. Vol. III. New York: Academic Press, 1989

[4] Green M, Schwarz J, Witten E. Superstring Theory. London: Cambridge University Press, 1987

[5] 孙洪洲,韩其智. 李代数、李超代数及其在物理学中的应用. 北京:北京大学出版社,1999 年

本书定价: 28 元

邮　　购: 北京大学校内北大书店,100871

电　　话: 010 - 62752015

·物理新闻与动态·

地下引力波探测器

日本物理学家建成了世界上第一个地下引力波探测器. 初步检验表明,由于地下的环境噪声减低使得在矿井中的激光干涉仪引力波小型观测站(LISM)能够稳定地工作. 探测器安置在超神冈中微子探测器附近地下 1km 深处. 引力波是时空结构中的波动,可由空间中大块物质加速而产生. 然而,即使像超新星爆炸或中子星及黑洞之间碰撞这样的事件所产生的引力波也是很微弱的,因而非常难探测.

引力波干涉仪用激光监测放在干涉仪两条相互垂直臂的端头上的检测物体的运动. LISM 的臂长只有 20m,相对于意大利的臂长 3km 的 VIGRO 探测器和美国的臂长 4km 的两个 LIGO 探测器来讲,是很短的.

当引力波通过探测器时,会引起检测物体之间的距离在一个方向上增加,而在另一方向上减小. 但是引力波所引起的这种变化极小,只有 10^{-21}m,所以探测器必须非常灵敏. 而极灵敏的探测器很容易受到环境噪声(如周围发生的地震和温度变化等)的影响.

LISM 合作研究组通过在地下进行实验来克服环境噪声问题. 初步实验表明,尽管 LISM 的臂很短,其位移灵敏度可与日本的 TAMA 探测器及德国的 GEO600 实验相比. 此外,当 LISM 与 LIGO 两台仪器直接比较时,LISM 的位移灵敏度比 LIGO 要高两个数量级.

研究小组准备建立另一个带有低温设备的探测器,以减低热噪声的影响. 新的仪器的灵敏度将可与美国升级后的探测器 LIGO - II 相比.

(树华　编译自 Physics web News 6 April 2004)