

# 微腔量子电动力学的基本概念与方法

孙昌璞 王颖丹 李勇 张

中国科学院理论物理研究所, 北京 100080

## 摘要

微腔量子电动力学 (腔 QED) 是原子物理与量子光学研究的交叉研究领域。它主要研究原子与特定边界条件下量子化光场的相互作用。在过去的几十年里腔 QED 预言了许多崭新的物理现象, 如微腔中原子自发辐射的抑制或增强和强耦合极限下辐射谱的 Rabi 分裂等。近年来, 由于冷却原子技术和光刻方法的长足进步, 在超小尺度腔中, 可以实现光子和原子质心动量能量的有效交换, 从而导致原子光学的诞生。特别是最近在量子信息的研究中, 腔 QED 系统显示了其它系统不可替代的作用。因此, 我们有必要以深入浅出的方式, 系统地介绍腔 QED 的基本概念和方法。这不仅可以使其在量子信息中的应用研究建立在坚实的基础之上, 而且能够加深对特殊条件下光与物质相互作用丰富的物理现象及其内在本质的理解。

## 内容

- 一、引言
  - 二、理想微腔中的原子与原子光学
  - 三、真空中原子的自发辐射
  - 四、非理想腔及其与原子的相互作用: 准模理论
  - 五、微腔对原子自发辐射的控制: 微观热库理论
  - 六、微腔中多原子系统的集体激发与量子存贮
- 附录 A、Fock-Li 准模的推导
- 附录 B、F-P 腔与波导管中电磁场的态密度

## §1 引言

量子电动力学 [1] 是描述电磁场与物质相互作用的基本理论。它在极高的精度上, 成功解释了诸如电子反常磁矩和氢原子能级兰姆 (Lamb) 移动等重要的物理发现。可以说, 量子电动力学是现代物理学中最经得起实验检验的重要理论之一 [2]。量子电动力学研究主要强调描述电磁相互作用时电磁场量子化的必要性。对于原子物理而言, 只有通过量子化的电磁场, 才能正确描述真空中原子自发辐射等纯量子效应。

作为量子电动力学的一个重要发展, 微腔量子电动力学 (腔 QED) [3] 主要是研究在微腔提供的特殊边界条件下电磁场量子化效应及其对其中实物粒子 (如原子) 的影响。从数学形式上讲, 场的量子化是一种本征模式 (Normal mode) 展开的过程。由于这些本征模式由相应的经典场方程的边界条件决定, 由微腔的腔壁限定出各种各样的边界条件, 使得腔量子化的研究内容变得十分丰富。从物理上讲, 腔壁提供了腔中电磁场与外界交换能量的方式, 它的改变能直接影响微腔中发生的任何由电磁相互作用主导的物理过程。

1948 年, E.Purcell 在提交给美国物理学会春季会议的论文中 [4], 提出了腔 QED 的关键思想: 联系于原子的射频跃迁, 原子的自发辐射率会被与之耦合的共振电路所增强。其物理机制在于这种耦合改变了自由空间辐射场的模密度。1954 年, 在磁共振试验中, 人们发现了类似的现象 [5]。在随后的三十年里, 虽然人们在原理上对微腔中原子自发辐射进行了各种各样的探索, 但直到 80 年代中期实验上才有实质性进展。其中主要的困难在于, 人们需要制备尺度在  $\mu\text{m}$  量级的微腔, 以实现频率  $10^{14}\text{Hz}$  量级的光子行为 (波长约为  $\mu\text{m}$  量级) 进行控制。1985 年, Kleppner 在 MIT 的研究小组首先利用间距为  $0.2\text{mm}$  的法布里 - 珀罗 (F-P) 微腔, 成功地抑制了其中的 Rydberg 原子的自发辐射, 使寿命增加到真空中寿命的 20 倍。这个工作是腔 QED 研究的重要转折 [6]。

腔 QED 发展的另外一个方面与原子激光冷却相联系 [7]。这方面的进展导致了原子光学的建立。众所周知, 在传统的原子物理中 [8], 室温下原子质心动量比光场中光子动量大了许多量级, 光子与原子质心交换动量的效应可以忽略不计。然而, 三十年来, 激光冷却原子的技术取得了突飞猛进的进展, 人们

可以把原子质心运动冷却到  $\mu K$  以下的量级 ( 相当于动量为  $10^{-10} \sim 10^{-9} ev$  ), 这与微波场中光子动量  $10^{-9} ev$  完全可以比拟。因此, 原子质心与光场交换动量会引起原子运动轨迹的改变, 从而会得到原子束的聚焦、分束和折射反射等一系列类光效应。这些原子系统物质波特征在超低温条件下的明显表现, 是原子光学研究的基本对象。

本文的目的是面向已经进入或正要进入这个领域研究的读者 ( 特别是青年读者 ), 深入浅出地介绍腔 QED 的基本概念, 并具体讨论以后研究中有使用价值的处理方法。显然, 我们并不希望能在这样短的篇幅内全面地阐述腔 QED 的内容, 但本文力争理清它的思想脉络, 并对一些必要技巧给出详细的讨论。使有关读者能通过具体例子, 亲自动手, 涉足于腔 QED 的研究。为此, 我们全文安排如下:

首先, 我们以 F-P 腔为例, 阐述腔场量子化的基本思想。在这个讨论中, 我们主要强调边界条件的作用: 理想边界条件会给出驻波模式的单模或多模腔场量子化, 而非理想的边界条件会给出耗散的微腔模式。为了了解自发辐射的基本特征, 本文将从半经典理论出发进行讨论。然后给出基于 Wigner-Weisskopf 近似的量子理论, 阐述真空中原子自发辐射的基本机制。这种理论与热库中量子耗散过程形成的物理机制十分相似。为了直观地了解非理想腔 ( 低  $Q$  腔 ) 对其中原子自发辐射过程的影响, 我们通过考察边界条件引起的腔中电磁场状态密度的改变, 唯象地分析自发辐射率的压低和增强。其中, 本文还主要介绍了非理想腔中准模的物理概念。作为本评述文章的主要部分, 我们在第五部分, 全面地介绍了腔量子电动力学的微观模型, 在这一模型中, 微腔腔壁的耗散作用, 被一般地描绘成谐振子热库, 单模腔场也被处理成理想的谐振子, 它们之间的相互作用导致腔场模式的耗散, 从而对与腔场相互作用的原子产生影响。本文最后一部分, 初步介绍了单模腔场与多原子系统相互作用, 其中, 我们主要强调多原子系统的集体激发。

总之, 通过本文的学习, 我们希望读者不仅对腔 QED 有一个概观式的了解, 而且希望通过本文的学习, 能够掌握腔 QED 的基本观念和方法的精髓。本文只假定读者已经掌握大学本科初等量子力学的主要内容。

## §2 理想微腔中的原子

本节主要介绍如图 1 所示的一维法布里 - 珀罗 ( F-P ) 微腔中电磁场量子化问题。其目的之一是为了对于没有学过量子电动力学的读者, 初步介绍场量子化的基本思想。其目的之二是为了本文自身的自洽性。关于电磁场量子化的一般讨论可参阅任何一本量子电动力学和量子场论的标准教材或教科书, 但为了学习量子光学和原子物理的需要, 作者建议读者阅读 W.H.Louisell 的 Quantum Statistical Properties of Radiation ( John Wiley, New York, 有中译本)。

### §2.1 F-P 微腔中电磁场的量子化 [10]

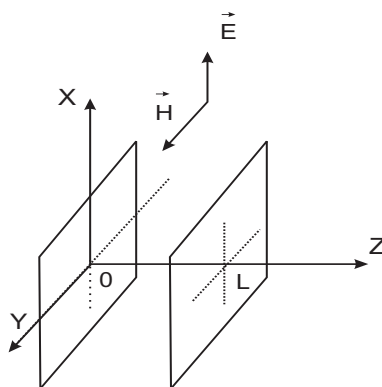


图 1: 由两无穷大超导平板构成的一维微共振腔 ( F-P 腔)

我们考虑 F-P 腔 (如图 1 所示) 中的无源电磁场辐射, 其中 F-P 腔是由两个原理上无穷大的平行平面导体 (如内壁涂有铌超导材料的金属板) 壁组成。两壁之间的间距为  $L$ 。腔中的电场  $\mathbf{E}$  满足 Maxwell 波动方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}. \quad (2.1)$$

其中  $c$  为光速。理想导体在  $z = 0$  和  $z = L$  处提供的边界条件  $E_x(0) = E_x(L) = 0$  给出的  $\mathbf{E}$  只有  $x$  分量  $E_x$  (此时磁场  $\mathbf{H}$  只有  $y$  分量  $H_y$ ) 的特解:

$$E_x = Q_l(t) \sin \frac{l\pi}{L} z \quad (2.2)$$

不难证明, 波动方程分离变量的时间部分满足谐振子运动方程:

$$\ddot{Q}_l(t) + \frac{l^2 \pi^2 c^2}{L^2} Q_l(t) = 0 \quad (2.3)$$

利用 Maxwell 方程可计算出对应于电场  $E_x$  的磁场:

$$H_y = \frac{\epsilon_0 L}{l\pi} \dot{Q}_l(t) \cos \frac{l\pi}{L} z \quad (2.4)$$

由此可以计算出电磁场的哈密顿量

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int_0^L dz (\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H^2) s \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_0 \epsilon_0^2}{2k_l^2} V \right) [\dot{Q}_l(t)^2 + \omega_l^2 Q_l(t)^2] \end{aligned} \quad (2.5)$$

这里,  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  分别为真空中的磁导率和电导率,  $s$  为 F-P 腔的横截面积,  $V = sL$  为腔的体积,  $k_l = \frac{l\pi}{L}$  为驻波的波矢, 相应的频率  $\omega_l = ck_l$ 。

引入“归一化”的力学量  $q_l(t) = \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0^2}{2k_l^2} V} Q_l$ ,  $p_l(t) = \dot{q}_l(t)$  和相应的“产生-湮灭”算子  $a_l^\dagger$  和  $a_l$

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_l}} (\omega_l q_l + ip_l) \quad (2.6)$$

单模电磁场的哈密顿量可以表达为单模谐振子的形式:

$$\mathcal{H}_l = \frac{1}{2} (p_l^2 + \omega_l^2 q_l^2) = \hbar\omega_l a_l^\dagger a_l \quad (2.7)$$

这时, 电磁场的量子化可视为谐振子的正则量子化

$$[q, p] = i\hbar, [a, a^\dagger] = 1 \quad (2.8)$$

于是, 我们得到 F-P 腔中横向单模电磁场量子化的表达式

$$E_l(z, t) = \varepsilon_l (a_l + a_l^\dagger) \sin \frac{l\pi}{L} z \quad (2.9)$$

其中  $\varepsilon_l = \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{V\epsilon_0}}$  为“单位体积场振幅”。

需要指出的是, 理想的边界条件  $E_x(0) = E_x(L) = 0$  给出了分离出空间部分的波动方程

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z) + k_l^2 E_x(z) = 0 \quad (2.10)$$

的解

$$u_l(z) = \sin k_l(z) \quad (2.11)$$

它们构成一组完备的本征矢微腔任意一种电磁场位形场可以表达为  $u_l$  被称为腔场的正规模 (Normal Mode)。可以认为, 场量子化过程对应于场算符的正规模展开。以后的讨论将表明, 非理想的边界条件不能给出正规模的全部特征 (如完备性的问题)。这时, 得到的电磁场模式被称为准模 (Quasi Mode)[11, 12]。

## §2.2 单模光场与原子相互作用的模型

根据现代物理学的基本观点,自然界的物理性质主要源于物质相互作用。但由于物质世界及其相互作用的复杂性,人们只能通过从实际中抽象出的模型和近似方法去描绘自然界的主要特性。光与物质的相互作用的研究为这一观点提供了极好的例证。这就是关于单模光场和二能级原子相互作用的 Jaynes-Cummings(JC)模型 [13]。虽然文献和教科书均给出 JC 模型的推导,但本节将从第一原理的“全量子理论”出发,展现推导 JC 模型的基本思路,并主要阐述旋波近似的基本思想。

为简单起见,仅考虑单个中性原子。设原子核的质量为  $M$ , 坐标为  $\mathbf{R}$ , 核外电子质量为  $m$ , 电荷为  $e$ , 坐标为  $\mathbf{r}$ 。当原子处在电磁势为  $\mathbf{A}$  的电磁场中,根据最小耦合原理,只须对没有电磁作用的原子系统哈密顿量中核与原子的正则动量  $\mathbf{P}_s$  ( $s = R, r$ ) 作规范平移:

$$\mathbf{P}_R \longrightarrow \mathbf{P}_R - \mathbf{A}(\mathbf{R}), \quad \mathbf{P}_r \longrightarrow \mathbf{P}_r + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (2.12)$$

其中我们取“自然单位制”。由此,得到电磁场中原子的基本哈密顿量

$$H_a = \frac{1}{2M}(\mathbf{P}_R - \mathbf{A}(\mathbf{R}))^2 + \frac{1}{2m}(\mathbf{P}_r + \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + V(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|) \quad (2.13)$$

其中  $V(|\mathbf{R} - \mathbf{r}|)$  代表电子与核的库仑相互作用。

引入相对坐标  $\mathbf{x} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$  和质心坐标  $\mathbf{Q} = \frac{M\mathbf{R} - m\mathbf{r}}{M+m}$  以及相应的正则动量  $P_x$  和  $P$ 。在原子质量  $M$  很大的大质量极限  $\frac{m}{M} \rightarrow 0$ , (对于束缚态电子而言,也考虑到电子运动尺度远小于原子质心运动的范围), 即  $Q - x \sim Q$ , 则上述基本哈密顿量可近似为

$$H_a \simeq \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{P}_x^2}{2m} + V(x) - \frac{\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{A}(Q)}{m} \quad (2.14)$$

其中忽略了“双光子项”  $\mathbf{A}^2$  和高阶的  $o^2(\frac{\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{A}(Q)}{m})$

类似于 Born-Oppenheimer 近似 [14, 15], 固定  $Q$  求解关于  $x$  变量的本征值问题

$$\left(\frac{\mathbf{P}_x^2}{2m} + V(x)\right)|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = \hbar\omega_n \quad (2.15)$$

同时,考虑  $x$  的运动方程  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{P}_x}{m} - \frac{\mathbf{A}}{m}$  可得

$$\langle m|\mathbf{P}_x|n\rangle = \frac{m}{i\hbar}(E_n - E_m)\langle m|\mathbf{x}|n\rangle + \delta_{mn}\mathbf{A} \quad (2.16)$$

这时,

$$H_a = \frac{P^2}{2M} + \hbar \sum \omega_n |n\rangle\langle n| + i\mathbf{A} \cdot \sum (\omega_m - \omega_n) \langle m|\mathbf{x}|n\rangle |m\rangle\langle n| + o^2(\mathbf{A}). \quad (2.17)$$

对于二能级情况, (记  $|e\rangle$  和  $|g\rangle$  分别为原子的激发态和基态,  $E_g = 0$ , 而  $\mathbf{x}$  为奇宇称 ( $\langle S|\mathbf{x}|S\rangle = 0$ )), 有

$$H_a = \frac{P^2}{2M} + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + i\omega_e \mathbf{A} \cdot \mu(|e\rangle\langle g| - |g\rangle\langle e|), \quad (2.18)$$

其中  $\mu = \langle e|\mathbf{x}|g\rangle$  为电偶极矩。

现在考虑 2.1 节中描述的单模微腔电磁场情况。由  $E_x = \frac{\partial}{\partial t} A_x$ ,  $H_y = \mu_0 \frac{\partial}{\partial z} A_x$  反解出

$$A_x = \alpha(Q)a^\dagger + \alpha^*(Q)a \quad (2.19)$$

其中  $\alpha$  和  $\alpha^*$  分别为  $A_x$  的正频分量和负频分量,  $Q = z$ 。于是, 单模光场与二能级原子相互作用系统的哈密顿量

$$H = \frac{P^2}{2M} + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega a^\dagger a + g(Q)(a^\dagger - a)(|e\rangle\langle g| - |g\rangle\langle e|) \quad (2.20)$$

其中  $g(Q) = \omega_e \mu \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_{e0} V}} \sin kQ$ , 是微腔的有效模式。通过  $U_F(t) = \exp[-i\omega a^\dagger a - i\omega_e |e\rangle\langle e|]$  变化到相互作用表象, 哈密顿量中将出现四种不同频率的项:

$$|e\rangle\langle g|a \longrightarrow |e\rangle\langle g|a e^{-i(\omega - \omega_e)t} \quad (2.21)$$

$$|g\rangle\langle e|a \longrightarrow |g\rangle\langle e|a e^{-i(\omega + \omega_e)t} \quad (2.22)$$

和它们的反厄米共轭由于在近共振的条件下,  $|e\rangle\langle g|a^\dagger$  和  $|g\rangle\langle e|a$  分别对应于以下“虚过程”(图 2), 它们对运动的贡献是两个高频项, 其频率为  $\omega + \omega_e$ 。 $|e\rangle\langle g|a$ ,  $|g\rangle\langle e|a^\dagger$  对应于频率为  $\delta = \omega - \omega_e$  的低频“实过程”(图 3), 虚过程是可以忽略不计。详细的数学证明可以在文献 [16] 中找到, 其核心思想是: 一个缓变函数与一个高频振荡函数的长时间积分为零。上述忽略虚过程的近似被称为旋转波近似 (RWA)。在这种近似下, 我们得到描述单模光场与二能级原子相互作用和质心运动的 JC 模型

$$H = \frac{P^2}{2M} + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega a^\dagger a + g(Q)a^\dagger |g\rangle\langle e| + h.c \quad (2.23)$$

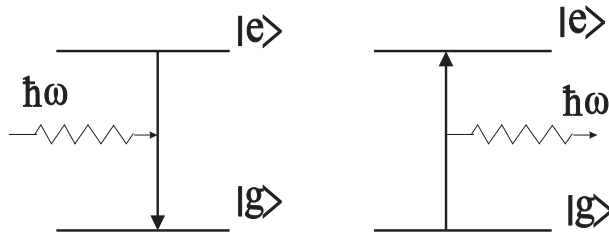


图 2: 二能级原子与单模光场作用的虚过程

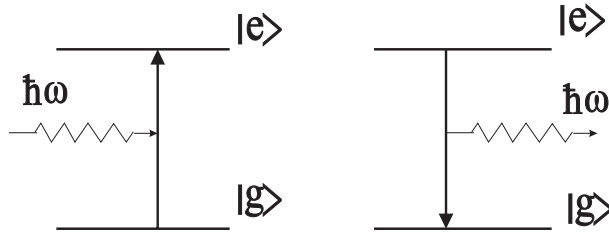


图 3: 二能级原子与单模光场作用的实过程

其中  $\frac{P^2}{2M}$  与相互作用项  $H_I = g(Q)a^\dagger|g\rangle\langle e| + h.c$  通常不对易, 故一般不能严格求解。

以上是关于 JC 模型纯量子论的推导, 它也可以在半经典偶极近似下推导出来。即采用偶极近似  $\frac{e}{m}\mathbf{A}\cdot\mathbf{P} \sim e\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$ , 其中  $e\mathbf{r} = \boldsymbol{\mu}$  是原子电偶极矩。但需要指出的是, 只有在旋波近似下,  $\frac{e}{m}\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}$  才与  $e\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$  等价。这个观点隐含于文献 [17] 的理论推导中。另外, 考虑到  $g(Q) = g_0 \sin kQ$  的驻波情况  $[P, \sin kQ] = -k \cos kQ$ , 当驻波场光子的动量  $k$  与原子质心的动量  $P$  相比很小时, 我们可以近似地认为  $[P, \sin kQ] = 0$ 。于是, 可以不考虑原子内部运动与质心运动的耦合。这相当于忽略了多普勒效应, 由此可以得到传统的 JC 模型。

$$H_{JC} = \hbar\omega_e|e\rangle\langle e| + \hbar\omega a^\dagger a + ga^\dagger|g\rangle\langle e| + h.c \quad (2.24)$$

JC 模型虽然对原子与光场相互作用的真实过程作了相当大的简化, 但由于它能够非微扰地精确求解, 它可以正确地预言了系统的演化过程的整体性质。如预言了原子布居数的塌缩 (collapse) 和恢复 (revival) 过程。这个现象已在实验中得到了证实 [18]。JC 模型能够描写真实效应的典型特征, 如真实空自发辐射过程。假设体系初态  $|\psi\rangle = |e\rangle \otimes |0\rangle$ , 其中  $|0\rangle$  是腔场的真空态, 其上电场的平均强度为 0,  $\langle 0|E|0\rangle = 0$ 。根据经典或半经典理论, 偶极相互作用  $H_I = e\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}$  在  $E$  为零时, 不会引起从  $|e\rangle \otimes |0\rangle$  到  $|g\rangle$  的跃迁。但当电磁场量



子化以后, 从  $|e\rangle$  到  $|g\rangle \otimes |n+1\rangle$  的跃迁几率 [17]

$$P_n = \frac{4g^2(n+1)}{\sqrt{(\omega - \omega_a)^2 + 4g^2(n+1)}} \sin^2 \sqrt{\frac{1}{4}(\omega - \omega_a)^2 + g^2(n+1)} \quad (2.25)$$

在  $n=0$  时, 不再为零, 这表明真空电磁场可以扰动原子的运动。关于这些现象的详细讨论, 大家可以参见文献 [17]。

### §2.3 原子光学基本概念 [8]

在以上关于理想微腔 QED 的讨论中看到, 如果光子的动量与原子质心动量可以相比拟 (原子的物质波波长很长), 我们就不能简单地把体系的空间自由度和内部自由度分开, 这时就必须考虑原子质心和光场的动量交换。

原子光学的最简单例子如图 4, 一束超冷原子垂直于驻波场的主轴方向入射到导腔场中。光场的作用将使得超冷原子吸收横向光子。由于光子动量是分立的, 相互作用后原子将分束, 溅射到某种衬底上, 将形成具有周期结构的干涉条纹。

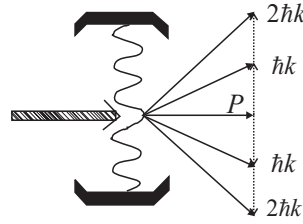


图 4: 原子束在垂直于传播方向的驻波场中分束

需要指出的是, 如果不使用超冷原子和微腔, 原子纵向动量  $p$  将远远大于吸收光子获得的横向动量  $\hbar k$ , 分束效应就不明显。这就是为什么激光冷却原子和微结构光刻技术是实现微腔 QED 原子光学最必要的技术基础。

考虑到质心运动, 以下为了方便起见, 重新把原子质心记为  $z$ , 则描述原子光学的哈密顿量重新写为

$$\mathcal{H} = \frac{p_z^2}{2M} + \frac{1}{2}\hbar\omega_e (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) - \hbar g(z) (a|e\rangle\langle g| + a^\dagger|g\rangle\langle e|), \quad (2.26)$$

其中已考虑到腔中单模电场可由腔场的正规模  $\mathbf{u}(z)$  表达为

$$E(z) = E_0[a\mathbf{u}^*(z) + a^\dagger\mathbf{u}(z)], \quad (2.27)$$

$E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}$  是微腔中“每个光子的场强”， $V = \int |\mathbf{u}(r)|^2 dr$  是有效模体积。于是有

$$g(z) = \frac{E_0}{\hbar} \mathbf{d} \cdot \mathbf{u}^*(z), \quad (2.28)$$

$\mathbf{d}$  为偶极算符的矩阵元。

先考虑绝热原子光学的基本思想。由于我们考虑的是超冷原子，它的空间运动不足以激发原子内部能级跃迁（可以想象，由于外场  $\mathbf{u}(z)$  不均匀，在原子运动坐标系中看，原子经历了一个时间变化场，当这个场变化得足够缓慢，通常的绝热近似成立），因此可以应用 Born-Oppenheimer 近似，去近似地分离原子的内部运动和空间运动，得到哈密顿量（2.26）的半因子化本征函数

$$|\psi\rangle = \phi_{\pm n}(z) |\pm n[z]\rangle, \quad (2.29)$$

其中被质心坐标  $z$  参数化的内部状态  $|\pm n[z]\rangle$  是  $z$  固定时

$$\mathcal{H}_{JC}(z) = \frac{1}{2}\hbar\omega_e (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) - \hbar g(z) (a|e\rangle\langle g| + h.c.) \quad (2.30)$$

的本征函数。相应于本征值

$$V_{\pm n}(z) = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \pm \sqrt{(\frac{\omega - \omega_e}{2})^2 + g^2(z)n(n+1)} \quad (2.31)$$

的本征函数可以明显地表达为

$$|+n[z]\rangle = \cos\theta_n |e, n\rangle - \sin\theta_n |g, n+1\rangle \quad (2.32)$$

$$|-n[z]\rangle = \sin\theta_n |e, n\rangle + \cos\theta_n |g, n+1\rangle \quad (2.33)$$

其中， $\theta_n$  由

$$\tan 2\theta_n = \frac{2g(z)\sqrt{n+1}}{\delta}, \quad \delta = \omega - \omega_e \quad (2.34)$$

决定。原子质心部分满足运动方程

$$[\frac{p_z^2}{2M} + V_{\pm n}(z)]\phi_{\pm n}(z) = E\phi_{\pm n}(z). \quad (2.35)$$

它表明，当超冷原子绝热在内部态  $|\pm n[z]\rangle$  时，它的质心部分将感受到有效势  $V_{\pm n}(z)$ ，这个势将导致原子质心运动轨迹的改变。

原子光学的一个典型例子是逆 Stern — Gerlach 效应。假设一个处激发态  $|e\rangle$  上的二能级原子，从  $z = 0$  处进入一个失谐量（ $\delta < 0$ ）很小、且包含  $n$  个光

子的微腔中。由于在  $z = 0$  处,  $g(z) = 0$ ,  $|+n[z = 0]\rangle = |e, n\rangle$ , 则该原子在微腔中将绝热地跟随  $|+n[z]\rangle$  态, 从而空间部分为  $\phi_{+n}(z)$ 。这时, 如果光场初态是 Fock 态  $|n\rangle$  的相干叠加态  $|\phi\rangle = \sum C_n |n\rangle$  (如相干态  $C_n = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2) \cdot \alpha^n / \sqrt{n!}$ ), 则在  $t$  时刻整个体系从因子化态  $|\psi(0)\rangle = |\phi\rangle \otimes |e\rangle$  演化到一个纠缠态

$$\psi_+(z, t) = \sum C_n \phi_{+n}(z, t) \quad (2.36)$$

上,  $\phi_{+n}(z, t)$  满足含时薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi_{+n}(z, t) = [-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_z^2 + V_{+n}(z)] \phi_{+n}(z, t). \quad (2.37)$$

需要指出的是,  $\delta$  的正负号决定了原子进入腔中时  $|+n[z = 0]\rangle$  是  $|e, n\rangle$  还是  $|g, n + 1\rangle$ 。例如, 当  $\delta > 0$  时,  $\tan 2\theta_n$  从负值趋近于 0, 则  $\theta_n = \frac{\pi}{2}$  (而不是  $\frac{3\pi}{2}$ )。这时,  $\phi_{-n}(z = 0) = |e, n\rangle$ , 这表明原子将经历有效势  $V_{-n}(z)$ 。方程 (2.39) 表明, 对应于不同的光子数态, 原子质心的空间运动将经历不同有效势  $V_{\pm n}(z)$ , 从而使得未进入腔场前瞬间的一个原子质心波包将相应地分为不同的波包。这个现象与 Stern — Gerlach 实验极为相似。现在的电磁场是量子化的, 导致分裂的机制是电磁场状态的不同, 而不是象在传统 Stern — Gerlach 实验中, 分束的根源在于原子内态的不同。

### §3 真空中原子的自发辐射

近代物理的许多实验表明, 即使在外部电磁场不存在的情况下, 处在激发态的原子仍然是不稳定的, 从激发态跃迁到基态必然辐射光子。这种现象不能用非相对论量子力学解释。这是因为微扰哈密顿量

$$H_I = \frac{1}{M} \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2M} \simeq -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} \quad (3.1)$$

矩阵元  $\langle g|H_I|e\rangle$  决定了跃迁几率幅, 当  $\mathbf{A} = 0$  时, 它为零。因此, 一个完整的理论必然涉及到场的量子化。在量子化的情况下真空态的场虽然意味着场强为零, 但其真空涨落不为零, 它是导致上述自发辐射的根本原因。需要指出的是, 早在量子力学建立之前, 爱因斯坦就提出了自发辐射的唯象描述, 这个理论在近似的意义下至今仍然是正确的。

## §3.1 自发辐射的半经典理论

为了全面理解自发辐射这一重要物理现象，从而深入理解微腔对于自发辐射的影响。我们先概略地介绍爱因斯坦对于自发辐射的半经典唯象描述。

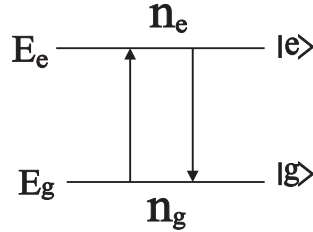


图 5: 自发辐射的半经典图象

如图 5，在强度分布为  $\rho(\omega)$  光场照射下，原子从  $|g\rangle$  到  $|e\rangle$  ( $E_e > E_g$ ) 的受激吸收几率是

$$W_{eg} = B_{eg}\rho(\omega_{eg}) \quad (3.2)$$

其中  $B_{eg}$  为吸收系数，在偶极近似下，它可以由微扰理论得到

$$B_{eg} = \frac{4\pi^2 e^2}{3\hbar^2} |\langle e|\mathbf{r}|g\rangle|^2 \quad (3.3)$$

而对于受激辐射过程，跃迁几率为

$$W_{ge} = B_{ge}\rho(\omega_{ge}) \quad (3.4)$$

显然， $\mathbf{r}$  的厄米性决定了  $B_{eg} = B_{ge}$ ，它与入射光场强度无关。

根据 Boltzman 分布，在  $|e\rangle$  和  $|g\rangle$  上的平衡态原子数之比为

$$\frac{n_e}{n_g} = e^{(E_g - E_e)/k_B T} = e^{\hbar\omega_{ge}/k_B T} \quad (3.5)$$

由此可以看出

$$n_g B_{eg}\rho(\omega_{eg}) \neq n_e B_{ge}\rho(\omega_{ge}) \quad (3.6)$$

因而，仅有受激过程时，辐射和吸收无法平衡。为了维持实际问题中的辐射吸收平衡必须唯象地加入所谓的自发辐射项  $A_{ge}$  (A 系数)，使得

$$n_g B_{eg}\rho(\omega_{eg}) = n_e B_{ge}\rho(\omega_{ge}) + n_e A_{ge}. \quad (3.7)$$

联立 (3.5) 和 (3.7) 可解得

$$\rho(\omega_{eg}) = \frac{A_{eg}}{B_{eg}} \frac{1}{n_g/n_e - 1} = \frac{A_{eg}}{B_{eg}} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{eg}} - 1}, \quad (3.8)$$

$\beta = \frac{1}{k_B T}$  在高温极限下很小, 即  $e^{\beta\hbar\omega_{eg}} \simeq 1 + \beta\hbar\omega_{eg}$

$$\rho(\omega_{eg}) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{A_{eg}}{B_{eg}} \frac{k_B T}{\hbar\omega_{eg}}. \quad (3.9)$$

比较它与 Reyleigh-Jeans 公式

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T, \quad (3.10)$$

能够得到自发辐射系数

$$A_{eg} = \frac{4e^2 \omega_{eg}^3}{3\hbar c^3} |\langle e | \mathbf{r} | g \rangle|^2. \quad (3.11)$$

这个公式与一阶微扰论得到的跃迁几率公式相似, 它描写了原子自发辐射的短时间行为。

为了对自发辐射有一个概观了解, 我们作以下估算。考虑从  $|2P\rangle$  态到  $|1S\rangle$  的跃迁和相应的 A 系数

$$A_{1S,2P} = \frac{4e^2}{3\hbar c^3} \omega_{1S,2P}^3 |\langle 1S | \mathbf{r} | 2P \rangle|^2. \quad (3.12)$$

利用氢原子本征函数

$$\psi_{210} = \langle \mathbf{r} | 2P \rangle = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{z}{a^{5/2}} e^{-r/2a}, \quad \psi_{100} = \langle \mathbf{r} | 1S \rangle = \frac{1}{\pi^{1/2} a^{3/2}} e^{-r/a}, \quad (3.13)$$

其中  $a = \hbar^2 / m_e e^2$ 。可以计算出  $A_{1S,2P} \sim 6.27 \times 10^8 s^{-1}$ , 所以  $|2P\rangle$  态的寿命为  $\tau = \frac{1}{A} \sim 1.6 \times 10^9 s$ 。

### §3.2 真空自发辐射的量子理论

爱因斯坦理论指出了自发辐射的存在, 但只是提供了一个统计描述。为了彻底描述自发辐射的微观机制, 必须用到量子电动力学, 即在微观的理论中电磁场必须量子化, 相互作用必须从最小耦合原理 - U(1) 规范理论出发。本节的讨论是研究微腔 QED 的基础。

为方便计，我们仅考虑二能级原子与真空背景场通过电偶极作用耦合起来。用  $b^\dagger$  和  $b$  表示真空背景场的产生消灭算子， $|e\rangle$  和  $|g\rangle$  分别表示原子的激发态和基态，则系统的哈密顿量为：

$$H = \hbar\omega_a|e\rangle\langle e| + \sum_{\alpha} \hbar\omega_{\alpha}b_{\alpha}^{\dagger}b_{\alpha} + \sum_{\alpha} (V_{\alpha}^*b_{\alpha}|e\rangle\langle g| + V_{\alpha}b_{\alpha}^{\dagger}|g\rangle\langle e|) \quad (3.14)$$

注意上述哈密顿量中已使用了旋波近似。所谓的自发辐射是指原子处在激发态，背景场处在真空态时的量子跃迁。这个过程可以描述为从初态

$$|\psi(0)\rangle = |e\rangle \otimes |0_1\rangle \otimes \cdots \otimes |0_N\rangle \equiv |e\rangle \otimes |0\rangle \equiv |e, 0\rangle \quad (3.15)$$

到末态

$$|\psi_f\rangle = |g\rangle \otimes |1_{\alpha}\rangle = |g, 1_{\alpha}\rangle \quad (3.16)$$

的跃迁，其中引入了记号：

$$|0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \cdots |0\rangle$$

$$|1_{\alpha}\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \cdots \otimes |1\rangle_{\alpha} \otimes |0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle$$

设系统在  $t$  时刻的波函数为

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega_a t}(A(t)|e, 0\rangle + \sum_{\lambda} B_{\lambda}(t)|g, 1_{\lambda}\rangle) \quad (3.17)$$

则有系数满足的微分方程组

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial A(t)}{\partial t} = \sum_{\lambda} V_{\lambda} B_{\lambda}(t), \\ i\hbar \frac{\partial B_{\lambda}(t)}{\partial t} = \hbar(\omega_{\lambda} - \omega_a) B_{\lambda}(t) + V_{\lambda}^* A(t) \end{cases} \quad (3.18)$$

对此进行 Laplace 变换， $\bar{f}(P) = \int_0^{\infty} dt f(t) e^{-Pt}$  ( $f = A, B_{\lambda}$ )，得到：

$$\begin{cases} P\bar{A}(P) = \sum_{\lambda} \frac{V_{\lambda}}{i\hbar} \bar{B}_{\lambda}(P) + 1, \\ (P + i(\omega_{\lambda} - \omega_a))\bar{B}_{\lambda}(P) = -\frac{V_{\lambda}^*}{i\hbar} \bar{A}(P) \end{cases} \quad (3.19)$$

从中消除  $\bar{B}_{\lambda}(P)$ ，可得

$$\begin{aligned} \bar{A}(P) &= \frac{1}{P + \Gamma(P)}, \\ \bar{B}_{\lambda}(P) &= \frac{V_{\lambda}^*}{i\hbar} \frac{1}{(P + \Gamma(P))(P + i(\omega_{\lambda} - \omega_a))} \end{aligned} \quad (3.20)$$

其中  $\Gamma(P) = \sum_{\lambda} \frac{|V_{\lambda}|^2}{\hbar^2} \frac{1}{P+i(\omega_{\lambda}-\omega_a)}$ 。

为了通过 Laplace 反演求出  $A(t)$  和  $B_{\lambda}(t)$ ，首先必须了解  $D(P) = P + \Gamma(P)$  的零点（即  $\bar{A}(P)$  的奇点）是什么。由于  $A(P)$  涉及到  $P$  的多重求和，严格解是很难的。为此，我们应用 Wigner-Weisskopf 近似 [9]。由于无相互作用时  $|V_{\lambda}|^2 = 0$ ， $P + \Gamma(P)$  的零点为  $P_0 = 0$ ，则  $|V_{\lambda}|$  很小时，零点是 0 附近的一个微扰展开。即  $P_0 = P^{[0]} + \mu P^{[1]} + \mu^2 P^{[2]} + \dots$  是  $D(P)$  的零点。 $\mu$  为引入的微扰参量。代入  $D(P_0) = 0$  并比较  $\mu$  的同次项系数有

$$P^{[0]} = 0, \quad P^{[1]} = - \sum_{\lambda} \frac{|V_{\lambda}|^2}{P^{[0]} + i\Delta_{\lambda}} \quad (3.21)$$

在一级近似下，零点为

$$P \simeq P^{[1]} = - \lim_{p^{[0]} \rightarrow 0} \sum \frac{|V_{\lambda}|^2}{p^{[0]} + i\Delta_{\lambda}} \quad (3.22)$$

利用公式  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{x+is} = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$  可以得到

$$\begin{aligned} P^{[1]} &= \lim_{p^{[0]} \rightarrow 0} \sum \frac{|V_{\lambda}|^2/\hbar^2}{p^{[0]} + i\Delta_{\lambda}} \\ &= i \sum_{\lambda} \frac{|V_{\lambda}|^2/\hbar^2}{\Delta_{\lambda}} - \pi \sum \frac{|V_{\lambda}|^2}{\hbar^2} \delta(\omega_{\lambda} - \omega_a) \\ &\equiv -\frac{1}{2}\gamma - i\Delta\omega \end{aligned} \quad (3.23)$$

其中  $\gamma = 2\pi \sum_{\lambda} \frac{|V_{\lambda}|^2}{\hbar^2} \delta(\omega_{\lambda} - \omega_a)$  是系统的衰减率， $\Delta\omega = \sum_{\lambda} \frac{|V_{\lambda}|^2/\hbar^2}{\omega_a - \omega_{\lambda}}$  是所谓的 Lamb 移动。

由此在弱作用极限下，我们得到

$$\begin{aligned} \bar{A}(P) &\simeq \frac{1}{p + \frac{1}{2}\gamma + i\Delta\omega}, \\ \bar{B}_{\lambda}(P) &\simeq \frac{V_{\lambda}^*}{i\hbar} \frac{1}{(P + \frac{1}{2}\gamma + i\Delta\omega)(P + i(\omega_{\lambda} - \omega_a))} \end{aligned} \quad (3.24)$$

其反演为

$$\begin{aligned} A(t) &= e^{-\frac{1}{2}\gamma t - i\Delta\omega t}, \\ B_{\lambda}(t) &= -\frac{V_{\lambda}^*}{\hbar} \frac{(e^{-\frac{\gamma}{2}t - i(\omega_a - \omega_{\lambda} + \Delta\omega)t} - 1)e^{-i(\omega_{\lambda} - \omega_a)t}}{-(\omega_a + \Delta\omega - \omega_{\lambda}) + i\frac{1}{2}\gamma} \end{aligned} \quad (3.25)$$

引入重整化物理频率  $\omega_P = \omega_a + \Delta\omega$ 。则

$$\begin{cases} a(t) = e^{-i\omega_a t} A(t) = e^{-\frac{1}{2}\gamma t - i\omega_P t} \\ B_{\lambda}(t) = -\frac{V_{\lambda}^*}{\hbar} \frac{(e^{-\frac{\gamma}{2}t - i(\omega_P - \omega_{\lambda})t} - 1)e^{-i(\omega_{\lambda} - \omega_a)t}}{-(\omega_P - \omega_{\lambda}) + i\frac{1}{2}\gamma}. \end{cases} \quad (3.26)$$

单位时间内原子由激发态跃迁到基态的几率（衰变率）

$$P_{e \rightarrow g} = -\frac{1}{|a(t)|^2} \frac{d}{dt} |a(t)|^2 = \gamma. \quad (3.27)$$

辐射场的光子数分布即吸收谱为：

$$|B_\lambda(t \rightarrow \infty)|^2 = \frac{|V_\lambda|^2}{\hbar^2} \frac{1}{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega_P - \omega_\lambda)^2}. \quad (3.28)$$

为了计算  $\gamma$  的明显表达式，我们记  $V(\omega_\lambda) = V_\lambda$ 。注意到量子化的电磁场

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\lambda=(q,\sigma)} \sqrt{\frac{\hbar\omega_a}{2\epsilon_0 V}} \mathbf{e}_\sigma(\mathbf{q}) (b_{q\sigma}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} - b_{q\sigma}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}) \quad (3.29)$$

和偶极近似下相互作用的表达式

$$V_{dipole} = -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}, \quad (3.30)$$

我们得到

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_q \frac{\hbar\omega_a}{2cV} \sum_\sigma |\langle e | \hat{\mathbf{e}}_\sigma(q) \cdot \boldsymbol{\mu} | g \rangle|^2 \delta(\omega_q - \omega_a) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_q \frac{\hbar\omega_a}{2c_0V} |\mu_{eg}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \delta(\omega_q - \omega_a). \end{aligned} \quad (3.31)$$

在非简并情况下，把求和换成积分。从而给出自发辐射率的明显表达式

$$\gamma = \frac{\omega_a^3 |\mu|^2}{3\pi \hbar c^3 \epsilon_0}. \quad (3.32)$$

如果谱分布为  $\rho(\omega)$ ，则

$$\gamma = \frac{\omega_a^3 |\mu|^2 \rho(\omega_a)}{3\pi \hbar c^3 \epsilon_0}. \quad (3.33)$$

在下一章我们将唯象地讨论微腔的存在将怎样修改微腔中电磁场的谱分布  $\rho(\omega_a)$ ，并从而改变原子的自发辐射率。这个考虑是腔 QED 研究的基础。

## §4 非理想微腔及其与原子相互作用：准模理论

由于小尺度的腔 — 微腔为电磁场和实物粒子的运动提供了特殊的边界条件，微腔中的原子和光场会出现很多与通常情况不一样的物理效应 [3]。首先，有耗腔与原子的相互作用会改变原子的自发辐射率，这正是本文主要讨论的



内容。其次，接近绝对零度的两块靠得很近的平面平行的无限大全反射镜之间存在着吸引力，此即著名的 Casimir 效应 [19]。另外，当把超冷原子注入只有一个小孔的真空腔中时，并非所有的原子都能进入腔内，有的原子会被反弹回来。这说明原子受到来自真空腔的力 [20]。实验上有迹象表明 [21, 22]，当两块平面镜中的一块运动时，两镜之间的真空会辐射光子。也有实验显示，液体中的小汽泡破裂时会发光，但其频率可能与组成液体的光谱频率无关，而只与汽泡本身的大小有关 [23]。这些物理现象均说明了特殊边界会导致新的物理现象，需要我们从基本理论方面加以研究。

这些实验增加了人们对腔以及腔与原子相互作用的兴趣。从物理上讲由于腔壁的存在，使得腔中不再存在连续的光子谱。并且如果腔壁是非理想的，以致腔与外界存在能量交换时，便会引起腔场模式的衰变，这就是腔耗散。腔场模式的衰变反映到原子上，即产生前述的原子的不可逆自发辐射。由 A.G.Fox 和 T.Li 在 1960 年首先提出的准模概念 [24, 25] 是描述腔耗散的重要方法。对于一个理想的封闭腔，例如一个一维腔的两壁均为理想的全反射镜时，腔中电磁场的模式是分立的，即只有波数  $k$  满足  $k = \frac{n}{L}\pi$  的模式才能存在于腔中。这里  $n$  为整数， $L$  为腔的线度。这些分立的模式被称为正规模式。实际中应用的腔往往会由于非理想腔壁的衍射，透射等造成腔场能量的损耗，腔内不再存在严格定义的正规模式。A.G.Fox 和 T.Li 在研究了由 A.L.Schawlow 和 C.H.Townes 提出的微波激射腔 [26] 中的电磁波的衍射后指出：这类腔中存在一系列分立的准正规模式，今被称为 Fox—Li 准模。对于这些准正规模式，腔中的衍射损耗很小。通常的激光理论就应用这些 Fox—Li 准模和唯象的耗散机制来代表在镜面处的损耗。七十年代，Lamb 等人 [33] 用腔与外界的耦合代替这种唯象的损耗，发展了准定态方式的准模理论。他们发现相应于每一个 Fox—Li 准模周围存在大量的环境模式 (modes of the universe)。在这个模型中腔中场模式接近于 Fox—Li 准模时，模式振幅变得很大，而当其偏离 Fox—Li 准模时，模式振幅迅速减小。

与 Lamb 等人所用的实边界条件 (包括出射波和入射波) 不同，采用出射 (outgoing) 边界条件，香港中文大学的杨纲凯领导的小组自八十年代以来发展了散射形式的准模理论 [27, 28, 29, 30, 31]。孙昌璞与之合作用双正交基方法对准模的完备性进行了系统的讨论 [32, 12]。本小节将先简要介绍 Fox-Li 和杨纲

凯小组的准模理论，最后谈一谈耗散腔中二能级原子自发辐射率的唯象计算方法。

#### §4.1 Fox—Li 准模理论

激光腔 (包括微波激射腔) 是典型的存在损耗的微腔. 由于损耗的存在, 激光腔中没有精确定义的正规模式. 以下我们采用 Lamb 等人 [11, 33, 34, 35] 对 Fox—Li 准模理论的描述. Lamb 等人 [33, 40, 37, 38, 39, 40, 41, 42] 所采用的理论模型如下. 考虑一个如图 6 所示的微波激射腔与外界耦合的系统. 用一个更大的带有完全反射壁的腔来表示环境, 微波激射腔就放在里面. 在  $x = 0$  和

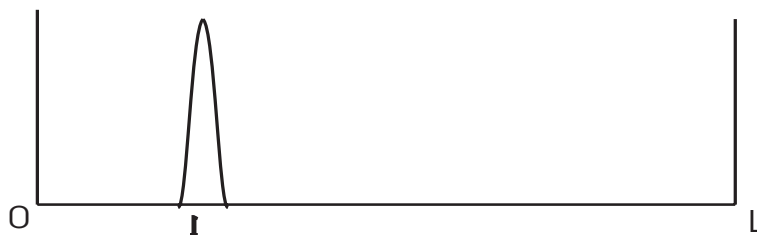


图 6: Lamb-Scully 理论中的耗散腔模型

$L$  处为全反射镜,  $x = l (l < L)$  为半透镜,  $L$  可以趋于无穷. 将半透镜用一个介电常数很大的薄板来代替, 就可将  $x = l$  附近的介电常数写成

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0[1 + \eta\delta(x - l)] \quad (4.1)$$

其中  $\eta$  是决定此壁的透射性的具有长度量纲的参数. 这个模型与热库模型形式上相似, 只是在目前的模型中, 腔与环境的 ”耦合” 仅由边界条件给出, 而不是象热库理论由 ”直接的相互作用” 决定.

整个腔中的电磁场由一维麦克斯韦方程决定, 即

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 [1 + \eta\delta(x - l)] \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (4.2)$$

采用准 ”定态” 方式求解方程, 设  $E$  的定态解为  $E = U_k(x)e^{-i\Omega_k t}$ , 分离变量得到  $U_k$  的本征方程为:

$$\frac{d^2 U_k(x)}{dx^2} + \mu_0 \varepsilon_0 [1 + \eta\delta(x - l)] \Omega_k^2 U_k(x) = 0. \quad (4.3)$$

根据边界条件

$$U_k(x) = 0 \quad x = 0, L \quad (4.4)$$

并注意在  $x = l$  处的连续性条件

$$U_k(l^+) = U_k(l^-) \quad (4.5)$$

在  $x = l$  附近积分得到另一个边界条件:

$$\partial_x U_k(l^+) - \partial_x U_k(l^-) = -\mu_0 \varepsilon_0 \eta \Omega_k^2 U_k(l) \quad (4.6)$$

由此不难看出本征方程 (4.3) 的解形式为

$$U_k(x) = A_k \sin kx \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.7)$$

$$U_k(x) = B_k \sin k(L - x) \quad l \leq x \leq L \quad (4.8)$$

其中  $k = |\Omega_k|/c$ 。需要说明的是, 在这个模型中我们采用了实边界条件, 即腔与环境的耦合包括出射和入射波。

根据连续性条件 (4.5) 和边界条件 (4.6) 我们得到关于  $A_k$  和  $B_k$  的方程组:

$$\begin{cases} A_k \sin kl = B_k \sin k(L - l) \\ A_k \cos kl + B_k \cos k(L - l) = A_k k \eta \sin kl \end{cases} \quad (4.9)$$

这个方程组只能确定到  $A_k$  和  $B_k$  的平方的比值,

$$\frac{A_k^2}{B_k^2} = \frac{\tan^2 kl + 1}{\tan^2 kl + (k\eta \tan kl - 1)^2} \quad (4.10)$$

其中

$$\tan k(L - l) = \frac{\tan kl}{k\eta \tan kl - 1} \quad (4.11)$$

通过对式 (4.10) 的行为的详细分析 (见附录 A), 我们可以得到  $A_k^2/B_k^2$  的近似表达式:

$$\frac{A_k^2}{B_k^2} = \frac{\Gamma^2 \Lambda^2}{\Gamma^2 + (\Omega_k - \Omega_n)^2} \quad (4.12)$$

其中

$$\left( \Omega_k \in \left[ \frac{c}{a} \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right), \frac{c}{a} \left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right)$$

并且  $\Gamma = \frac{c}{\Lambda^2 l}$ ,  $\Lambda = (\eta/l) \tilde{x}$ , 而  $\tilde{x}$  则是方程

$$\tan x = \frac{l}{\eta x}$$

的解。这里  $\Omega_n = n\pi + \frac{1}{\Lambda}$  就是 Fox-Li 准模。

(4.11) 式给出了本征值  $k$  及  $\Omega_k$  应满足的方程。等号左边的函数周期为  $\frac{\pi}{L-l}$ ，右边函数的奇异点满足  $\tan kl = \frac{1}{\xi kl}$ ，基本上每隔  $\frac{\pi}{l}$ ，就有这样一个解。在两个奇异点之间，此函数连续。由于  $\frac{\pi}{L-l} \ll \frac{\pi}{l}$ ，基本上每隔  $\frac{\pi}{L-l}$ ，(4.11) 式等号两边的函数会有一个交点（见图 7）。它代表该方程的一个解。因而  $\Omega_k$  空间的态密度为  $\frac{(L-l)}{c\pi}$ 。设某本征值  $k$  满足  $kl \in [(N-1)\pi, N\pi], k(L-l) \in [(n-1)\pi, n\pi]$ ，则可以用两个量的数组  $(N, n)$  标记这个本征值。

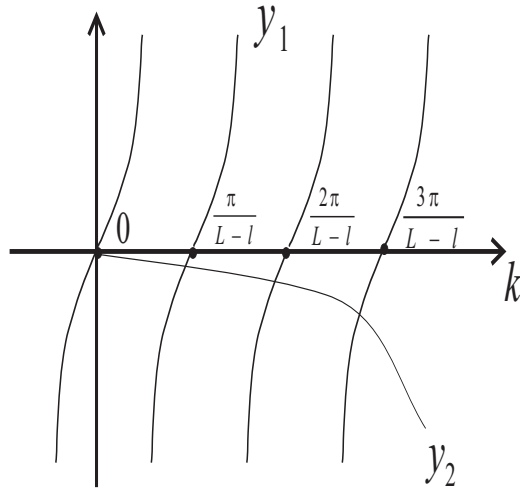


图 7: 4.11 式的求解:  $y_1$  代表该式等号左边的函数,  $y_2$  代表该式等号左边的函数。

另外, 由归一化条件

$$\int_0^L dx U_k(x) U_{k'}(x) \epsilon(x) / \epsilon_0 = \frac{L-l}{2} \delta_{kk'} \quad (4.13)$$

知,

$$\frac{1}{2} A_k^2 l + \frac{1}{2} B_k^2 (L-l) + \frac{1}{2} \eta A_k^2 \sin^2 kl = \frac{L-l}{2} \quad (4.14)$$

当  $L \rightarrow \infty$  时, 有  $B_k^2 = 1, A_k^2 = f(x)$ 。我们取

$$A_k = M_k = \frac{\Gamma \Lambda}{[(\Omega_k - \Omega_n)^2 + \Gamma^2]^{\frac{1}{2}}} > 0 \quad (4.15)$$

则由  $\frac{A_k}{B_k} = \frac{\sin k(L-l)}{\sin kl}$  知  $B_k = (-1)^{N-n}$ 。

现在再来考察自由振子衰变的例子。上述模型表明, 激光腔中半透镜的存在, 会引起自由振子的衰变。假设在  $t=0$  时刻, 激光腔内存在一个场, 场的

形式为

$$E(x, 0) = |E_0| \sin k_0(x - l) \left( k_0 = \frac{n\pi}{l}, n > 0 \right) \quad (3.18)$$

而此时腔外没有任何场存在，并且初始时刻光场对时间的导数为零。容易证明，

$$E(x, 0) \simeq \sum_{k \in \left[ \frac{n\pi - \frac{\pi}{2}}{l}, \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l} \right]} \frac{l}{L - l} |E_0| M_k U_k \quad (4.16)$$

此后，在  $t > 0$  时刻腔内电磁场的演化为

$$E(x, t) = \text{Re} \left( \frac{|E_0|l}{l + L} \sum_k M_k^2 U_k(x) e^{-i\Omega_k t} \right).$$

将上式对  $k$  的求和变成对  $\Omega_k$  的积分，得到

$$E(x, t) = \frac{|E_0|l}{c\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega_k \frac{\Gamma^2 \Lambda^2}{(\Omega_k - \Omega)^2 + \Gamma^2} \sin k_0(x - l) e^{-i\Omega_k t} \quad (4.17)$$

将积分开拓到整个复平面，选择通过下半平面的积分路径，应用留数定理，最后得到：

$$E(x, t) = |E_0| \sin k_0(x - l) \cos \Omega t e^{-\Gamma t} \quad (4.18)$$

这个结果说明，由于半透镜的存在，使腔内场的模式发生  $e$  指数衰变，衰变速率为  $\Gamma$ 。可以定义腔的品质因子  $Q = \Omega/2(\Gamma + \gamma)$  其中  $\gamma$  代表其它原因引起的衰变率。

#### §4.2 准模理论的散射形式及准模的完备性

以下我们将介绍另一种由杨纲凯小组发展的准模理论 [27, 28, 29, 30, 31]，以及由孙昌璞与该小组合作完成的描述准模完备性的双正交基方法 [32, 12]。

准正规模的典型例子是一维弦模型，是电磁场的一维标量类比。考虑在半无限弦的  $x = a(a > 0)$  点贴一个质点  $M$ ，弦的密度为

$$\rho(x) = 1 + M\delta(x - a).$$

这里我们令波速  $c = 1$ 。当  $M \rightarrow \infty$  时，弦的  $a$  点固定。质点  $M$  将此半无限弦分成两个部分：区域  $a \geq x \geq 0$  相当于一个微腔，区域  $\infty \geq x \geq a$  则相当于外

部环境，微腔与外部环境的能量交换只发生在边界  $x = a$  处。腔与外界的耦合可用散射边界条件

$$\rho(x)\partial_t\phi(x,t) = -\partial_x\phi(x,t), x > a \quad (4.19)$$

来表示。这个系统的波动方程为

$$[\rho(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}]\phi(x,t) = 0 \quad (4.20)$$

如果令

$$\phi(x,t) = u(x)\exp(-i\omega t),$$

则得到波动方程 (4.20) 的定态解  $U(x)$  满足方程:

$$[1 + M\delta(x-a)]\omega^2 U(x) + \partial_x^2 U(x) = 0, \quad (4.21)$$

与量子力学的散射共振态类似。对于本征态假设腔外的场是一个“散射态”形式的出射波 (outgoing wave)。相应地有

$$U(x) = \begin{cases} B_\omega e^{i\omega x} & (x > a) \\ A_\omega \sin \omega x & (a > x \geq 0) \end{cases}.$$

容易证明，此式自动满足散射边界条件。根据  $U(x)$  在  $a$  点的连续性并对 (4.21) 式在  $x = a$  的邻域内积分，我们得到决定本征频率的方程

$$M\omega = i - \cot(\omega a). \quad (4.22)$$

如果质点很大，且腔很小，则  $\frac{a}{M}$  很小，这时可以得到近似表示

$$\begin{aligned} \omega_j a &= j\pi + \frac{1}{j\pi} \frac{a}{M} + \left\{ -\frac{1}{(j\pi)^3} - \frac{i}{(j\pi)^2} \right\} \left(\frac{a}{M}\right)^2 + \cdots, j = \pm 1, \pm 2 \\ \omega a &= \pm \left(\frac{a}{M}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{i}{2} \frac{a}{M} \mp \frac{7}{24} \left(\frac{a}{M}\right)^{\frac{3}{2}} + \cdots, j = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

上述结果表明，系统的本征频率为分立的复值，且虚部为负。相应于这些复频率的模式就是系统的准正规模，记为  $f_n(x)$ 。用这些准正规模可以写出系统波动方程的一般解为：

$$\phi(x) = \sum_n c_n f_n(x) \exp(-i\omega_n t).$$

这个方案完全采用分立谱，但特征频率取值是复的。对于物理上合理的解， $\omega$  的虚部是负的，以保证  $t \rightarrow \infty$  时  $e^{-i\omega t}$  不发散。可以证明，在一定条件下，

重新定义内积的概念，系统的准正规模是完备和正交归一的 [27]. 下面我们将介绍描述准模完备性的另一种方法 — 双正交基法 [32].

在耗散过程的量子力学描述中，求解本征频率为复值的开放系统的标准方法为双正交基法 [43]. 以下我们以有限维空间为例作一介绍。设已知  $N$  维 Hilbert 空间中算子  $A$  的本征矢量  $\{|\alpha_n\rangle\}$  ( $A|\alpha_n\rangle = \alpha_n|\alpha_n\rangle$ ) 构成  $H$  中一组完备基矢，则容易证明  $A$  的共轭算子  $A^\dagger$  必亦有一组完备本征矢  $\{|\beta_n\rangle\}$  ( $A^\dagger|\beta_n\rangle = \alpha_n^*|\beta_n\rangle$ ) 且满足  $\langle\alpha_m|\beta_n\rangle = \delta_{mn}$ 。  $\alpha_n^*$  作为  $A^\dagger$  的本征值其简并度与  $\alpha_n$  作为  $A$  的本征值的简并度相同。

为了把这个方法应用于准模理论的讨论，我们先将方程 (4.20) 写成 *Schrödinger* 方程形式 [44]

$$i\partial_t|\Phi\rangle = \mathcal{H}|\Phi\rangle \quad (4.24)$$

其中

$$|\Phi(x, t)\rangle = \begin{pmatrix} \phi(x, t) \\ \hat{\phi}(x, t) \end{pmatrix}, \mathcal{H} = i \begin{pmatrix} 0 & \rho^{-1}(x) \\ \partial_x^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

这里引入了对偶动量

$$\hat{\phi} = \rho\partial_t\phi;$$

在我们的问题中， $|\phi\rangle$  满足  $\phi(x=0) = 0$  和  $\hat{\phi} = -\partial_x\phi$  ( $x > a$ )。用通常的办法定义内积：

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \int_0^\infty (\psi^*\phi + \hat{\psi}^*\hat{\phi}) dx \quad (4.26)$$

可以证明  $\mathcal{H}$  是非厄米的。

令

$$|F_n\rangle = \begin{pmatrix} f_n \\ \hat{f}_n \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

为  $\mathcal{H}$  的本征矢，即  $\mathcal{H}|F_n\rangle = \omega_n|F_n\rangle$ 。上式给出

$$\hat{f}_n = -i\omega_n\rho f_n \quad (4.28)$$

$$[\partial_x^2 + \rho(x)\omega_n^2]f_n(x) = 0. \quad (4.29)$$

假定  $|F_n\rangle$  构成二分量函数空间的一组完备基矢，则可令由  $\mathcal{H}$  的共轭算符  $\mathcal{H}^+$  决定的本征矢为  $|G_n\rangle$ 。则对偶的本征方程

$$\mathcal{H}^+|G_n\rangle = \omega_n^*|G_n\rangle,$$

也给出分量方程

$$g_n = i\omega_n^* \rho \hat{g}_n \quad (4.30)$$

$$[\partial_x^2 + \rho(x)\omega_n^{*2}]g_n(x) = 0 \quad (4.31)$$

其中

$$\mathcal{H}^+ = -i \begin{pmatrix} 0 & \partial_x^2 \\ \rho^{-1}(x) & 0 \end{pmatrix} |G_n\rangle = \begin{pmatrix} g_n \\ \hat{g}_n \end{pmatrix}.$$

比较 (4.28),(4.29) 与 (4.30),(4.31) 式可得

$$\hat{g}_n = e^{i\theta} f_n^*(\theta), \quad (4.32)$$

式中  $\theta$  是与  $x$  无关的任意实数. 由此我们得到准正规模的双正交基  $\{|F_n\rangle, |G_n\rangle\}$  的显式. 选择  $2\omega_n$  为  $|F_n\rangle$  的“归一化常数”, 于是有正交条件

$$\langle G_m | F_n \rangle = 2\omega_n \delta_{mn} \quad (4.33)$$

和双完备性条件

$$\sum_m \frac{|F_m\rangle \langle G_m|}{\langle G_m | F_m \rangle} = 1 \quad (4.34)$$

事实上, (4.34) 式给出一个矩阵等式:  $\begin{pmatrix} -i \sum_m \frac{\rho(y)f_m(x)f_m(y)}{2} & \sum_m \frac{f_m(x)f_m(y)}{2\omega_m} \\ -\sum_m \frac{\omega(m)\rho(x)\rho(y)f_m(x)f_m(y)}{2} & -i \sum_m \frac{\rho(x)f_m(x)f_m(y)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(x-y)$ , 它包含了  $f_n$  满足的四个等式.

另一方面, 我们可以将 *Schrödinger* 式 (4.24) 的解用  $|F_n\rangle$  展开, 得到:

$$|\Phi(x, t)\rangle \equiv \begin{pmatrix} \phi(x, t) \\ \hat{\phi}(x, t) \end{pmatrix} = \sum_n c_n e^{-i\omega_n t} |F_n\rangle \quad (4.35)$$

于是有 (4.24) 式的“演化算子”

$$G(t) = \sum_m \frac{|F_m\rangle \langle G_m| e^{-i\omega_m t}}{\langle G_m | F_m \rangle} \quad (4.36)$$

它的矩阵形式就是方程 (4.24) 的格林函数:

$$\tilde{G}(x, y, t) = \begin{pmatrix} \rho(y)\partial_t G(x, y, t) & G(x, y, t) \\ \rho(x)\rho(y)\partial_t^2 G(x, y, t) & \rho(x)\partial_t G(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (4.37)$$



其中

$$G(x, y, t) = \sum_m \frac{f_m(x)f_m(y)}{2\omega_m} e^{-i\omega_m t} \quad (4.38)$$

是波动方程 (4.20) 的格林函数.

### §4.3 微腔中原子的自发辐射的半唯象描述

我们已经知道, 真空中原子的自发辐射率正比于原子能级对应的光场态密度, 即

$$\gamma_f \propto \rho_f(\omega) |_{\omega=\omega_a}$$

其中  $\omega_a$  是原子能级间距. 在理想和非理想导体构成的微腔中, 光场态密度会发生变化. 相应地, 原子自发辐射率也会发生改变. 这方面一个最简单的例子是两块无限大平行理想导体板 (图 8) 之间的原子 [45, 46].

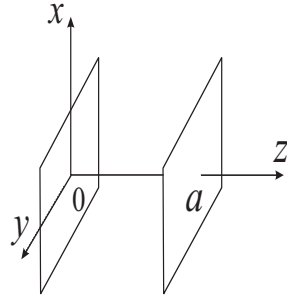


图 8: 平行导体板间的电磁场

我们假定两导体板间距  $a$  小于  $\omega_a$  对应波长  $\lambda$  的二分之一, 这样一来, 若导体板之间的电场频率在  $\omega_a$  左右, 则电磁场态密度 (见附录 B) 为

$$\rho_p(\omega_a) = \frac{\omega_a}{2\pi c^2 a} \quad (4.39)$$

于是相应的原子自发辐射率为

$$\gamma_p = \gamma_f \frac{\rho_p(\omega_a)}{\rho_f(\omega_a)} = \gamma_f \frac{\lambda}{4a} \quad (4.40)$$

由于  $a < \frac{\lambda}{2}$ , 故  $\frac{\lambda}{4a} < \frac{1}{2}$ , 原子的自发辐射被压低了一半以上.

稍微复杂一点的例子是波导管 (图 9) 中的原子 [45]. 考虑一个沿  $z$  方向放置的由理想导体构成的矩形波导管, 它在  $x$  方向和  $y$  方向的长度分别为  $L_x$  与  $L_y$ , 并有  $L_x > L_y$ .

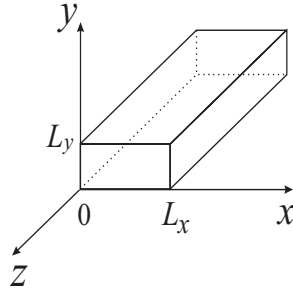


图 9: 波导管中的电磁场

于是, 此波导管有截止频率  $\omega_{10} = \frac{\pi}{L_x}c$ 。当原子的辐射频率  $\omega < \omega_{10}$  时,  $\rho(\omega) = 0$ , 相应的  $\gamma = 0$ 。即波导管中频率小于  $\omega_{10}$  的二能级原子的自发辐射回被完全抑制。

一般情况下, 波导中光场态密度 (见附录 B) 为

$$\rho_g(\omega) = \frac{2}{L_x L_y c \pi} \sum_{mn} \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_{mn}^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.41)$$

其中求和对所有小于  $\omega$  的  $\omega_{mn}$  进行。于是波导中原子自发辐射率为

$$\gamma_p = \gamma_f \frac{\rho_g(\omega_a)}{\rho_f(\omega_a)} \quad (4.42)$$

设  $\omega_{10} < \omega_a < \omega_{01}$ , 且  $\omega_{01} = 2\omega_{10}$ , 则

$$\gamma_g = \gamma_f \frac{4\omega_{10}^2}{\pi\omega_a (\omega_a^2 - \omega_{10}^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.43)$$

故  $\frac{\omega_a}{\omega_{10}} < \sqrt{k}$  时,  $\gamma_g > \gamma_f$ , 其中  $k = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{64}{\pi^2}} \right]$ ; 而  $\frac{\omega_a}{\omega_{10}} > \sqrt{k}$  时,  $\gamma_g < \gamma_f$ 。可见, 在理想波导管中增强和抑制自发辐射的现象均有发生。

在上面的计算中, 我们假定波导是由理想导体制成的。在面对实际波导时, 需要考虑其电阻造成的损耗。这可以用“品质”因子  $Q = \frac{a}{\delta}$  表征, 其中  $a$  为波导截面的特征尺度,  $\delta$  是趋肤深度 (skin depth)。计入有限的  $Q$  后, 在  $\omega = \omega_{10}$  时  $\rho_g(\omega)/\rho_f(\omega)$  将不再发散, 而取近似为  $Q$  的有限值 [45]; 当  $\omega$  远小于  $\omega_{10}$  时,  $\rho_g(\omega)/\rho_f(\omega)$  亦不为 0, 而接近于  $1/Q$ 。于是, 在真实的波导中,  $\omega_a \ll \omega_{10}$  时原子自发辐射率被抑制为原来的  $1/Q$ ;  $\omega_a$  接近  $\omega_{10}$  时自发辐射率被增强  $Q$  倍。

在三维理想腔中，光场在空间各方向的本征频率都是分立的，且有一定的间隔，因此可以只考虑原子与腔中最接近  $\omega_a$  的本征模式（设为  $\omega_0$ ）的相互作用。显然，如果腔是理想的，那么腔中的光场态密度为

$$\rho_c(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\omega - \omega_n) \quad (4.44)$$

其中  $\omega_n$  为腔中各模式的本征频率。这样一来，若  $\omega$  不正好是各种离散频率中的一个，则原子的自发辐射率将为 0，即自发辐射被完全抑制。

若腔有耗散，则情形大不相同。此时，腔中本征模式  $\omega_0$  附近的有效态密度  $\rho_c(\omega)$  将不取  $\delta$  函数的形式。下面我们计算  $\rho_c(\omega)$ 。考虑真空中电磁强度对时间和空间的积分（与能量成比例）：

$$W = \int |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{x} dt$$

其中  $\mathbf{E} = \int d\mathbf{k} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + h.c.$ 。设所有模式振幅相同，即  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = E_0 \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}$  则

$$W \propto \int_0^{\infty} \rho_f(\omega) d\omega \quad (4.45)$$

这是由于  $W$  表达式中对  $t$  的积分消除了不同频率之间的干涉，而对空间位置的积分则消除了不同波矢间的干涉，从而使  $W_\omega$  正比于拥有同一频率的波矢个数。需要指出的是，严格的说，这个比例系数是无穷大。严格处理要采用“剪除无穷大”的方法 - 重整化。因而，我们此处只是作一般的说明，而非严格的推导。另一方面，耗散腔中  $\omega_0$  模式的电磁场演化为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{E}_0 \sin k_0 x \cos \omega_0 t e^{-\omega_0 t/2Q} & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (4.46)$$

其中  $Q$  为品质因子，一般的腔  $Q = 10^3 \sim 10^4$ 。那么

$$W = \int |\mathbf{E}|^2 dt dx \propto \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon(t)|^2 dt \quad (4.47)$$

其中

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t e^{-\omega_0 t/2Q} & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

是电场的时间部分。容易证明,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon(t)|^2 dt \propto \int_0^{\infty} |\varepsilon_\omega|^2 d\omega$$

这里  $\varepsilon_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varepsilon(t) e^{i\omega t}$  是  $\varepsilon(t)$  的 Fourier 分量。于是有

$$W \propto \int_0^{\infty} |\varepsilon_\omega|^2 d\omega \quad (4.48)$$

这样一来, 就可以认为腔中的电磁场等效态密度  $\rho_c(\omega) \propto |\varepsilon_\omega|^2$ 。另一方面, 由  $\varepsilon(t)$  的显式直接计算得到

$$\varepsilon_\omega = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{i(\omega_0 + \omega) - \frac{\omega_0}{2Q}} + \frac{1}{i(\omega_0 - \omega) - \frac{\omega_0}{2Q}} \right] \quad (4.49)$$

由于  $\omega_a$  在  $\omega_0$  附近, 所以  $\omega_0 - \omega_a \ll \omega_0 + \omega_a$ 。因而

$$\varepsilon_{\omega_a} \approx \frac{1}{2} \times \frac{1}{i(\omega_0 - \omega_a) - \frac{\omega_0}{2Q}}$$

从而  $\rho_c(\omega_a)$  正比于一个以  $\omega_0$  为中心,  $\Gamma_c \equiv \omega_0/2Q$  为宽度的 Lorentz 函数。我们设

$$\rho_c(\omega_a) = \frac{\Gamma_c}{\pi V_c} \frac{1}{\Gamma_c^2 + (\omega_a - \omega_0)^2} \quad (4.50)$$

这里  $V_c$  是腔体积。于是腔中自发辐射率为

$$\gamma_c = \gamma_f \frac{\rho_c(\omega_a)}{\rho_f(\omega_a)} \quad (4.51)$$

在共振 ( $\omega_a = \omega_0$ ) 时, 有

$$\gamma_c = \gamma_f \frac{Q}{\pi^2} \quad (4.52)$$

自发辐射被加强。这里我们假定腔体积  $V_c = \frac{\lambda_0^3}{4}$ , 其中  $\lambda_0$  是  $\omega_0$  对应之光波波长。此结果由 Purcell 于 1946 年首先指出 [4], 被公认为腔量子电动力学的发端。在远离共振时, 自发辐射会被抑制。比如  $\omega_a = \omega_0/2$ , 且  $\omega_0$  为腔之基频时, 有

$$\gamma_c \simeq \gamma_f \frac{4}{\pi^2 Q} \quad (4.53)$$

此时的原子自发辐射率正比于真空情况的  $1/Q$ 。

在上面讨论中已经提到, 上述的计算是不严格的, 事实上, 文献在计算耗散腔中原子自发辐射时都直接“唯象的”引入形如 (4.47) 式的 Lorentz 形光场等效态密度。上面的计算是对这种做法的一个说明。使用腔中原子自发辐射的微观理论, 我们可以对这一问题进行更为严格的计算。

## §5 非理想微腔中的原子

第四节以半经典的方式唯象地讨论了微腔对其中原子自发辐射的影响，本节将阐述一个唯象的微观模型。由于腔壁的存在，使得腔中不再存在连续的光子谱。在这种情况下，有可能只存在单一的模式与原子近似共振，从而我们可以建立原子与单模光场作用的模型。由于腔壁的存在，非理想壁将引起腔场模式的衰变，这个衰变反映到原子上，即产生原子的不可逆自发辐射。

### §5.1 微腔原子自发辐射的微观模型

本节我们将讨论如图 10 所示的微观模型。基于物理考虑，我们作了以下近似：（1）忽略原子与腔壁的范德瓦尔斯力；（2）忽略原子质心与光场的动量交换，从而在原子运动的尺度上假设场是均匀的；（3）忽略原子与腔壁的直接作用。

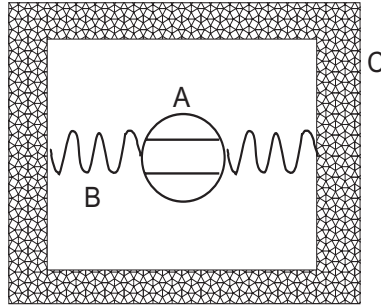


图 10: F-P 腔中的电磁场. A - 二能级原子, B - 电磁场, C - 腔壁

整个系统由三部分组成：腔场、腔壁和原子对应的自由哈密顿量分别为

$$H_f = \hbar\omega a^\dagger a, \quad H_w = \sum \hbar\omega_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha, \quad H_a = \hbar\omega_a |e\rangle\langle e| \quad (5.1)$$

，其中  $a_\alpha^\dagger$  代表腔壁中的低激发模式（如晶格振动），它满足  $[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$ 。在偶极近似和 RWA 下，原子与腔场间，腔场与腔壁间的相互作用分别为

$$\begin{aligned} H_{af} &= U |e\rangle\langle g| a + |g\rangle\langle e| a^\dagger U^* \\ H_{fw} &= \sum V_\alpha (a_\alpha a^\dagger) + h.c. \end{aligned} \quad (5.2)$$

要指出的是，在这里把腔壁的激发理解为无穷多个玻色子模式，在一级近似下也可以理解为费米子模式，单模激发的情况下两种情形是等价的。量子耗散理论关于环境相互作用普适性的讨论 [47, 48]，支持这种模型化假设。

我们选择无耦合基矢

$$|a, c, W_\alpha\rangle = |a\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{c!}} (a^\dagger)^c |0\rangle \otimes \prod_{\alpha=1}^N (a_\alpha^\dagger)^{W_\alpha} |0_\alpha\rangle, \quad (a = g, e; \quad c, W_\alpha = 0, 1, 2 \cdots) \quad (5.3)$$

作为系统的 Hilbert 空间的基矢。由此假设

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t} (A(t)|e, 0, 0\rangle + B(t)|g, 1, 0\rangle + \sum_{\alpha} C_{\alpha}(t)|g, 0, 1_{\alpha}\rangle) \quad (5.4)$$

是整个系统  $t$  时刻的波函数，其中  $|g, 0, 1_{\alpha}\rangle = |g\rangle \otimes |0\rangle \otimes a_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle$ 。

记  $u = \frac{U}{i\hbar}$ ， $v_{\alpha} = \frac{V_{\alpha}}{i\hbar}$  则 (5.4) 代入 schrodinger 方程得到

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) + i(\omega_a - \omega)A(t) &= uB(t) \\ \dot{B}(t) &= u^*A(t) + \sum_{\alpha} v_{\alpha}C_{\alpha}(t) \\ \dot{C}_{\alpha}(t) + i(\omega_{\alpha} - \omega)C_{\alpha} &= -v_{\alpha}^*B(t). \end{aligned} \quad (5.5)$$

从方程 (5.5) 我们可以讨论腔中原子自发辐射的问题。为了强调腔壁引起腔场 damping 作用，我们先假设原子不存在。这时，取  $A(t) = 0, B(0) = 1, C_{\alpha}(0) = 0$ ，从而有 Laplace 变换方程

$$\begin{cases} P\bar{B}(P) = \sum_{\alpha} v_{\alpha}\bar{C}_{\alpha}(P) + 1 \\ (P + i(\omega_{\alpha} - \omega))\bar{C}_{\alpha}(P) = v_{\alpha}^*\bar{B}(P). \end{cases} \quad (5.6)$$

这是一个描写谐振子在热库中耗散的典型方程 [40, 50]。从而

$$(P + \sum \frac{|V_{\alpha}|^2}{\hbar^2} \frac{1}{P + i(\omega_{\alpha} - \omega)})\bar{B}(P) = 1. \quad (5.7)$$

定义

$$\Gamma(P) = \sum \frac{|V_{\alpha}|^2}{\hbar^2} \frac{1}{P + i(\omega_{\alpha} - \omega)}, \quad (5.8)$$

则  $P + \Gamma(P)$  的零点为

$$P_0 = \frac{\gamma_c}{2} + i\Delta\omega, \quad (5.9)$$

其中

$$\gamma_c = 2\pi \sum_{\alpha} \frac{|V_{\alpha}|^2}{\hbar^2} \delta(\omega_{\alpha} - \omega), \quad \Delta\omega = \int_0^{\infty} \frac{V_{\alpha}^2 \rho(\omega_{\alpha})}{\hbar^2(\omega - \omega_{\alpha})} d\omega_{\alpha}. \quad (5.10)$$

上述讨论表明，由于腔壁的作用，腔场随时间衰变，即

$$\tilde{B}(t) = e^{-i\omega t} B(t) = e^{-\frac{\gamma_c}{2}t - i\Delta\omega t - i\omega t} = e^{-\frac{\gamma_c}{2}t - i\omega_p t}, \quad (5.11)$$

其中  $\omega_p = \Delta\omega + \omega$  为重整化的物理频率。

## §5.2 微腔中原子的自发辐射

现在我们可以用  $\gamma_c$  和  $\Delta\omega$  为新的参数, 从 (5.5) 出发讨论原子存在时的系统动力学。为此, 对 (5.5) 作 Laplace 变换

$$(P + i(\omega_a - \omega))\bar{A}(P) = u\bar{B}(P) + 1 \quad (5.12)$$

$$P\bar{B}(P) = u^*\bar{A}(P) + \sum_{\alpha} v_{\alpha}\bar{C}_{\alpha}(P) \quad (5.13)$$

$$(P + i(\omega_{\alpha} - \omega))\bar{C}_{\alpha}(P) = v_{\alpha}^*\bar{B}(P). \quad (5.14)$$

这里我们已取物理初值条件  $A(0) = 1, B(0) = 0, C_{\alpha}(0) = 0$ 。由 (5.13) 和 (5.14) 消掉  $\bar{C}_{\alpha}(P)$  得到

$$\bar{B}(P) = \frac{U^*/i\hbar}{P + \sum_{\alpha} \frac{|V_{\alpha}|^2}{\hbar^2(P + i(\omega_{\alpha} - \omega))}} \bar{A}(P), \quad (5.15)$$

再代入 (5.12) 得

$$\bar{A}(P) = \frac{1}{P + i(\omega_a - \omega) + \frac{|U|^2}{\hbar^2} \frac{1}{P + \sum_{\alpha} \frac{|V_{\alpha}|^2}{\hbar^2(P + i(\omega_{\alpha} - \omega))}}}. \quad (5.16)$$

利用以上引入的参数  $\gamma_c$  和  $\Delta\omega$

$$\sum \frac{|V_{\alpha}|^2}{\hbar^2} \frac{1}{P + i(\omega_{\alpha} - \omega)} \equiv \frac{\gamma_c}{2} + i\Delta\omega. \quad (5.17)$$

从而

$$\bar{A}(P) = \frac{P + \frac{\gamma_c}{2} + i\Delta\omega}{(P + i(\omega_a - \omega))(P + \frac{\gamma_c}{2} + i\Delta\omega) + |U|^2/\hbar^2}, \quad (5.18)$$

代入 (5.15) 得

$$\bar{B}(P) = \frac{U^*/i\hbar}{(P + i(\omega_a - \omega))(P + \frac{\gamma_c}{2} + i\Delta\omega) + |U|^2/\hbar^2} \quad (5.19)$$

,

$$\bar{C}_{\alpha}(P) = \frac{-U^*V_{\alpha}^*/\hbar^2}{\{(P + i(\omega_a - \omega))(P + \frac{\gamma_c}{2} + i\Delta\omega) + |U|^2/\hbar^2\}(P + i(\omega_{\alpha} - \omega))}. \quad (5.20)$$

为了明显地求出  $A(t), B(t)$  和  $C_{\alpha}(t)$  的表达式。我们需要求得  $\bar{A}(P), \bar{B}(P)$  和  $\bar{C}_{\alpha}(P)$  的奇点。  $\bar{A}(P), \bar{B}(P)$  有两个奇点:

$$P_{\pm} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_c}{2} + i\Delta\omega + i(\omega_a - \omega)\right) \pm \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\gamma_c}{2} + i\Delta\omega - i(\omega_a - \omega)\right)^2 - 4|U|^2/\hbar^2\right\}^{1/2}. \quad (5.21)$$

对于  $\bar{C}(P)$  除了  $P_{\pm}$  外还有第三个奇点

$$P_0 = i(\omega - \omega_a). \quad (5.22)$$

从而我们得到

$$A(t) = \frac{P_+ + \frac{\gamma_c}{2} + i\Delta\omega}{P_+ - p_-} e^{P_+ t} - \frac{P_- + \frac{\gamma_c}{2} + i\Delta\omega}{P_+ - p_-} e^{P_- t}, \quad (5.23)$$

$$B(t) = \frac{U^*}{i\hbar} \left( \frac{e^{P_+ t}}{P_+ - P_-} - \frac{e^{P_- t}}{P_+ - P_-} \right), \quad (5.24)$$

$$C_\alpha(t) = -\frac{U^* V_\alpha^*}{\hbar^2} \left( \frac{e^{P_+ t}}{(P_+ - P_-)(P_+ - P_0)} + \frac{e^{P_- t}}{(P_- - P_+)(P_- - P_0)} + \frac{e^{P_0 t}}{(P_0 - P_+)(P_0 - P_-)} \right). \quad (5.25)$$

为了与实际实验情况相比较，我们在下面分别取强耦合和弱耦合极限进行研究。所谓弱耦合极限就是指原子与光场的耦合系数（用  $|u|^2$  标记）远小于光场与腔壁的耦合（用  $\gamma_c$  标记）。反之称为强耦合极限。为了对弱耦合和强耦合的适用范围有所了解首先我们计算物理参数  $|u| = |U|/\hbar$ 。由于我们采用了电偶极近似，相互作用取

$$H_{fa} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}. \quad (5.26)$$

而单模量子化场

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{e} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} (a^\dagger e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \\ &\simeq \mathbf{e} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} (a^\dagger + a). \end{aligned} \quad (5.27)$$

从而知

$$\begin{aligned} U = \langle g, 1, 0 | H_{fa} | e, 0, 0 \rangle &= -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \langle g | \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E} | e \rangle \\ &\equiv -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \cdot \boldsymbol{\mu}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

故

$$|u|^2 = |U|^2/\hbar^2 = \frac{\omega}{2\epsilon_0 \hbar V} |\boldsymbol{\mu}|^2. \quad (5.29)$$

若我们取典型的分子作为微腔中的“原子”。对于分子转动谱中的两个能级有  $|\boldsymbol{\mu}| \simeq 10^{-18}$  (CGS 单位制)， $\omega \simeq 10^{11}$  Hz， $|u|^2 \simeq 10^3$  Hz。假设我们考虑低 Q 腔  $Q = \frac{\omega}{\gamma_c} = 10^3 \sim 10^4$ ， $\gamma_c \simeq 10^7/s$ 。则  $\gamma_c \gg |u|^2$ ，弱耦合条件满足。这时可以计算

$$\begin{aligned} P_+ &= -\frac{\gamma_c}{2} - i\Delta\omega + \frac{|u|^2}{\gamma_c/2 + i\Delta\omega - i(\omega_a - \omega)} \simeq -\frac{\gamma_c}{2} - i\Delta\omega, \\ p_- &= -i(\omega_a - \omega) - \frac{|u|^2}{\gamma_c/2 + i\Delta\omega - i(\omega_a - \omega)} \equiv -\frac{\gamma_c}{2} - i\Delta\omega_a - i(\omega_a - \omega). \end{aligned} \quad (5.30)$$



这里原子衰变率为

$$\gamma = \frac{|u|^2 \gamma_c}{(\frac{\gamma_c}{2})^2 + (\omega_a - \omega_p)^2}, \quad (5.31)$$

原子能级的 Lamb 移动是

$$\Delta\omega_a = -\frac{|u|^2(\omega_p - \omega_a)}{(\frac{\gamma_c}{2})^2 + (\omega_a - \omega_p)^2}. \quad (5.32)$$

由  $|u|^2$  的表达式得到微腔中原子的自发辐射率

$$\gamma = \gamma_v \frac{3\pi c^3}{\omega_a^3 V} \frac{\omega(\gamma_c/2)}{(\frac{\gamma_c}{2})^2 + (\omega_a - \omega_p)^2}, \quad (5.33)$$

其中  $\gamma_v = \frac{\omega_a |\mu|^2}{3\pi\hbar^2 \epsilon_0 c^3}$  为原子的真空自发辐射率。如果我们引入波长参数  $\lambda_a = \frac{2\pi c}{\omega_a}$  和微腔的品质因子  $Q = \frac{\omega}{\gamma_c/2} = 2\omega/\gamma_c$  则可以重新表达微腔中原子的自发辐射率

$$\gamma = \gamma_v \cdot \frac{3\lambda_a^3 Q}{8\pi^2 V} \cdot \frac{(\gamma_c/2)^2}{(\frac{\gamma_c}{2})^2 + (\omega_a - \omega_p)^2}, \quad (5.34)$$

相应地我们得到腔壁吸收的谱分布

$$|C_\alpha(t \rightarrow \infty)|^2 = \frac{|u|^2 |v|^2}{[\frac{\gamma_c^2}{4} + (\Delta\omega_a + \omega_a - \omega_\alpha)^2][\frac{\gamma_c^2}{4} + (\Delta\omega + \omega - \omega_\alpha)^2]}. \quad (5.35)$$

在近共振时,  $\omega_a \sim \omega_p$ , 从而  $\gamma \simeq \gamma_v \cdot \frac{3\lambda_a^3 Q}{8\pi^2 V}$  这表明小尺度的腔将加强原子的自发辐射。但远离共振时, 如  $2\omega_p = \omega_a$

$$\gamma = \gamma_v \cdot \frac{3\lambda_a^3 Q}{8\pi^2 V} \cdot \frac{(\omega_p/Q)^2}{(\omega_p/Q)^2 + \omega_p^2} \simeq \gamma_v \cdot \frac{3\lambda^3}{8\pi^3 V Q}, \quad (5.36)$$

由于  $Q \sim 10^4$ , 则自发辐射被减少 4 个数量级。

最后考察强耦合情况,  $|u|^2 \gg \gamma_c$  这对应于 Rydberg 原子  $|\mu| \simeq 10^{-16}$  (CGS 单位制), 并采用高 Q 超导腔  $Q \simeq 10^9, \gamma_c = 10^2 \ll |u|^2 \simeq 10^7 Hz$ 。这时

$$P_\pm = -\frac{i}{2}(\Delta\omega + \omega_a - \omega) - \frac{\gamma_c}{4} \pm i|u|, \quad (5.37)$$

从而可得到

$$|C_\alpha(\omega_\alpha)|^2 = \frac{|u|^2 |V_\alpha|^2}{((\gamma_c/4)^2 + (|u| + \frac{\Delta\omega + \omega_a + \omega - 2\omega_\alpha}{2})^2)((\gamma_c/4)^2 + (-|u| + \frac{\Delta\omega + \omega_a + \omega - 2\omega_\alpha}{2})^2)}. \quad (5.38)$$

这代表一个双 Lorentz 分布 (如图 11)。其分裂称为 Rabi 分裂, 已被实验明显地观测到 [51]。

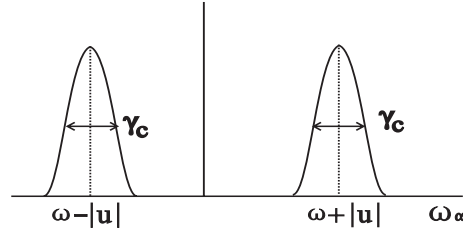


图 11: 微腔中原子光谱的 Rabi 分裂

### §5.3 受控自发辐射对原子质心运动的影响

5.2 节的讨论并没有涉及原子质心的运动，但对超冷原子而言，光子散射对原子质心的运动的影响是重要的。实际上，自发辐射影响原子质心运动是激光致冷理论的核心。为了加深对这类问题的理解，我们先从一个简单的模型出发 [52]。

考虑二能级原子与单模环形腔电磁场的作用。场原子部分的哈密顿量为

$$H_{af} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \hbar\omega_a |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_f a^\dagger a + U(a^\dagger e^{-ikx} |g\rangle\langle e| + h.c) \quad (5.39)$$

腔壁与场的作用会引起腔场的衰变，由

$$H_W = \sum_{\omega} \hbar\omega b_{\omega}^{\dagger} b_{\omega}$$

描述自由的腔壁，由

$$V = \sum_{\omega} g_{\omega} (b_{\omega}^{\dagger} a + h.c)$$

描述场与壁的作用。

定义  $|p, a, n, 1_{\omega}\rangle = |p\rangle \otimes |a\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{\dagger n} |0\rangle \otimes b_{\omega}^{\dagger} |0\rangle$ ， $(a = e, g; n = 0, 1, 2, \dots)$ ，其中  $|P\rangle$  为质心动量的本征态，则相互作用将引起以下形式的动量交换过程（如图 12）：

$$|p, e, 0, 0\rangle \longrightarrow |p - \hbar k, g, 1, 0\rangle \longrightarrow |p - \hbar k, g, 0, 1_{\omega}\rangle \quad (5.40)$$

上面三个态分别对应于自由能量是  $\frac{p^2}{2m} + \hbar\omega_a = \hbar\omega_A$ ， $\frac{(p - \hbar k)^2}{2m} + \hbar\omega_f = \hbar\omega_F$ ， $\frac{(p - \hbar k)^2}{2m} + \hbar\omega = \hbar\omega_W$ 。

于是可以假设

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega_F t} (A(t)|p, e, 0, 0\rangle + B(t)|p - \hbar k, g, 1, 0\rangle + \sum_{\omega} C_{\omega}(t)|p - \hbar k, g, 0, 1_{\omega}\rangle) \quad (5.41)$$

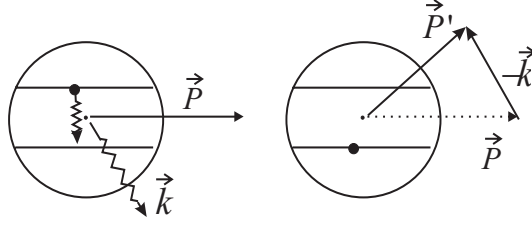


图 12: 自发辐射诱导原子质心反冲

为整个系统的波函数，初始条件为  $A(0) = 1, B(0) = C_\omega(0) = 0$ 。代入薛定谔方程直接计算可以得到

$$\begin{cases} \dot{A}(t) + i(\omega_A - \omega_F)A(t) = \frac{U}{i\hbar}B(t) \\ \dot{B}(t) = -\frac{U}{i\hbar}A(t) + \sum_{\alpha} \frac{g_{\omega}}{i\hbar}C_{\omega}(t) \\ \dot{C}_{\omega}(t) + i(\omega - \omega_F)C_{\omega}(t) = -\frac{g_{\omega}}{i\hbar}B(t) \end{cases} \quad (5.42)$$

这与原来腔中原子自发辐射的计算完全类似，这里只须作替换  $\omega_f \leftrightarrow \omega_F, \omega_a \leftrightarrow \omega_A$ 。这里仍然可以使用无源腔的耗散参数

$$\gamma_f = \frac{2\pi|g_{\omega_F}|^2}{\hbar^2}\rho(\omega_F), \quad \Delta\omega_f = \int_0^{\infty} \frac{|g_{\omega}|^2\rho(\omega)}{\hbar^2(\omega_F - \omega)}d\omega.$$

对 (5.42) 进行 Laplace 变换，最后可得到波函数系数的解

$$A(t) = \frac{P_+ + \frac{\gamma_f}{2} + i\Delta\omega_f}{P_+ - P_-}e^{P_+t} - \frac{P_- + \frac{\gamma_f}{2} + i\Delta\omega_f}{P_+ - P_-}e^{P_-t}, \quad (5.43)$$

$$B(t) = \frac{U^*}{i\hbar} \left( \frac{e^{P_+t}}{P_+ - P_-} - \frac{e^{P_-t}}{P_+ - P_-} \right), \quad (5.44)$$

$$C_{\omega}(t) = -\frac{U^*g_{\omega}^*}{\hbar^2} \left( \frac{e^{P_+t}}{(P_+ - P_-)(P_+ - P_0)} + \frac{e^{P_-t}}{(P_- - P_+)(P_- - P_0)} + \frac{e^{P_0t}}{(P_0 - P_+)(P_0 - P_-)} \right), \quad (5.45)$$

其中，

$$P_{\pm} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_f}{2} + i\Delta\omega_f + i\Delta \right) \pm \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\gamma_f}{2} + i\Delta\omega_f - i\Delta \right)^2 - 4|U|^2/\hbar^2 \right\}^{1/2},$$

这里  $\Delta = \omega_A - \omega_F = \omega_a - \omega_f + \frac{pk}{m} - \frac{\hbar k^2}{2m}$ 。

对于弱耦合情况  $\gamma_c \gg |g_{\omega}|^2$  有

$$A(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i(\omega_A - \omega_F + \Delta\omega_a)t}, \quad (5.46)$$

其中

$$\gamma = \frac{\gamma_f |U|^2 / \hbar^2}{(\frac{\gamma_f}{2})^2 + (\omega_A - \omega_p)^2} \equiv \gamma(k)$$

$$\Delta\omega_a = \frac{|U|^2 (\omega_A - \omega_p) / \hbar^2}{(\frac{\gamma_f}{2})^2 + (\omega_A - \omega_p)^2},$$

这里  $\omega_p = \omega_F + \Delta\omega_f$ 。

由上述结果可以研究原子自发辐射过程对质心运动的影响。考察原子质心动量平均值随时间的演化

$$p(t) = \langle \psi(t) | \hat{p} | \psi(t) \rangle = p |A(t)|^2 + (p - \hbar k) (|B(t)|^2 + \int_0^\infty \rho(\omega) |C_\omega|^2 d\omega). \quad (5.47)$$

由归一化条件

$$|A(t)|^2 + |B(t)|^2 + \int_0^\infty \rho(\omega) |C_\omega|^2 d\omega = 1 \quad (5.48)$$

可以得到

$$p(t) = p - \hbar k + \hbar k e^{-\gamma t}. \quad (5.49)$$

原子质心动量改变

$$F(k) = \frac{dp(t)}{dt} = -\hbar k \gamma(k) e^{-\gamma(k)t}. \quad (5.50)$$

当存在相对传播的一对行波时，原子受到的合力为

$$F_T = F(k) + F(-k)$$

$$= -\hbar k \{ e^{-\gamma(k)t} \gamma(k) - e^{-\gamma(-k)t} \gamma(-k) \}. \quad (5.51)$$

而

$$\gamma(k) \simeq \frac{\gamma_f |U|^2 / \hbar^2}{(\frac{\gamma_f}{2})^2 + (\omega_a - \omega_f)^2} - \frac{2vk(\omega_a - \omega_f) \gamma_f |U|^2 / \hbar^2}{((\frac{\gamma_f}{2})^2 + (\omega_a - \omega_f)^2)^2},$$

其中  $v = \frac{p}{m}$ 。从而，原子受到一个阻尼力  $F_T = -\alpha(t)v$  (如图 13)，其中

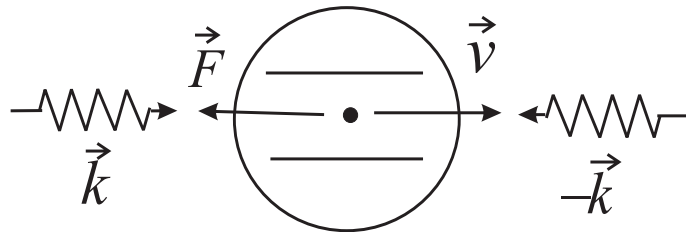


图 13: 原子在对传光场中的阻尼运动

$$\alpha(t) = \frac{4\hbar k^2(\omega_f - \omega_a)\gamma_f|U|^2/\hbar^2}{((\frac{\gamma_f}{2})^2 + (\omega_a - \omega_f)^2)^2} e^{-\tilde{\gamma}t} \equiv \alpha_0 e^{-\tilde{\gamma}t}, \quad (5.52)$$

而

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma_f|U|^2}{(\omega_a - \omega_f)^2 + (\frac{\gamma_f}{2})^2}. \quad (5.53)$$

不计腔壁相关的量子涨落，原子质心运动的运动方程是

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha_0 e^{-\tilde{\gamma}t} v. \quad (5.54)$$

从而有

$$v = v_0 e^{-\frac{\alpha_0(1-e^{-\tilde{\gamma}t})}{m\tilde{\gamma}}}. \quad (5.55)$$

$t \rightarrow \infty$  时，原子质心运动变到一个下限  $v \rightarrow v_0 e^{-\frac{\alpha_0}{m\tilde{\gamma}}}$ ，将 ( 5.52 ) ( 5.53 ) 代入，得到

$$v \rightarrow v_0 \exp\left[\frac{4\hbar k^2(\omega_f - \omega_a)}{(\frac{\gamma_f}{2})^2 + (\omega_a - \omega_f)^2}\right]. \quad (5.56)$$

在上述讨论中，如果  $\omega_f < \omega_a$ ，则  $\alpha(t) < 0$ 。这时原子被加速。这称为反多普勒效应。

## §6 微腔中多原子的集体激发与量子存贮

在以前各节的讨论中，我们均假设了电磁场只与孤立的单个原子相互作用。这里既不考虑原子间相互作用，也不考虑多个原子共同与一个共振单模光场相干地耦合起来的集体行为。事实上，如果所讨论的由大量原子组成的系综被局限在一个较小的空间区域内（如微腔中），当原子之间的间距  $d$  相当于原子辐射的波长时，原子之间的相干效应是必须考虑的。因为在这种情况下，一个原子辐射光被另一个原子吸收，不再是一个低阶过程。 $N$  个原子的这种发射吸收的集体形成所谓的超辐射，它给出的辐射强度会正比于原子数目的平方  $N^2$ ，而不是  $N$ 。

我们可以从一个简单例子考察这种集体激发的基本物理机制。在旋转波近似下，两个二能级原子与单模光场的相互作用可由哈密顿量

$$H_I = (g_1 |e_1\rangle \langle g_1| + g_2 |e_2\rangle \langle g_2|) a + h.c. \quad (6.1)$$

描述。当原子间距足够小时，可以认为  $g_1$  和  $g_2$  代表的外场是均匀的，即  $g_1 \sim g_2 = g$ 。如果初始时刻，两个原子处于对称化的基态  $|g_1, g_2\rangle$  上，光场处于双光子态  $|2\rangle$ ，体系将从初态  $|\psi(0)\rangle = |g_1 g_2\rangle \otimes |2\rangle$  可以演化到另外两个对称态  $|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|e_1 g_2\rangle + |e_2 g_1\rangle] \otimes |1\rangle$  和  $|10\rangle = |e_1 e_2\rangle \otimes |0\rangle$ 。这一点可以由  $U(t) = \exp(-iH_I t)$  的微扰展开得到： $U(t) \simeq 1 - iH_I t + \frac{i^2}{2} H_I^2 t^2 + \dots$ ，它作用于  $|\psi(0)\rangle$  上时只产生对称态。这个简单的推导表明，双原子的电偶极跃迁只能在原子对称化的状态间进行。考虑到双原子的空间是 4 维，其中还有反对称的状态存在： $|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|e_1 g_2\rangle - |g_1 e_2\rangle]$ ，但由于  $\langle g_1 g_2 | H_I | A \rangle = 0$ ，因此不出现从  $|A\rangle$  到基态  $|g_1 g_2\rangle$  的跃迁，这个态通常称为暗态 [53, 54]。暗态不辐射的物理机制在于， $|e_1 g_2\rangle$  态和  $|g_1 e_2\rangle$  态的跃迁有相同的位相，在对称态和反对称态中它们之和（或之差）会相干地增强（或相干地相消）。

对于  $N$  个原子的对称态而言，其对称态对应于正比  $N$  的矩阵元，从而辐射强度正比于  $N^2$ 。以上讨论暗示我们，在均匀外场中， $N$  个原子的对称化状态会定义出原子系综的集体激发，在某种低激发极限下，这种低激发会表现出玻色子的行为，这种集体激发称为原子系综的激子。目前，有许多理论和实验在探讨用这种激子系统进行量子信息存贮的可能性 [53, 54, 55, 56]。

### §6.1 微腔中二、三能级多原子系统集体激发的激子行为

为了一般地讨论多原子与微腔相互作用的集体行为的动力学特征，我们考虑  $N$  个全同二能级原子组成的多原子系统与单模量子化光场组成的复合系统。整个系统的哈密顿量根据狄克模型 [57] 可以写为 ( $\hbar = 1$ )

$$\hat{H} = \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Omega \sum_{i=1}^N |e\rangle_{ii} \langle e| + g \hat{a}^\dagger \sum_{i=1}^N |g\rangle_{ii} \langle e| + H.c., \quad (6.2)$$

其中， $\Omega$  为原子跃迁频率，原子基态用  $|g\rangle$ ，激发态用  $|e\rangle$  标记。假定所有原子与光场的耦合强度相同，并用耦合常数  $g$  来标记。 $\hat{a}$  标记单模光场的湮灭算符。因为每一个二能级原子都可以视为一个角动量为  $1/2$  的系统，于是我们可以引入总角动量算符

$$J_- = \sum_{i=1}^N \sigma_-^i, J_+ = (J_-)^\dagger = \sum_{i=1}^N \sigma_+^i, J_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_z^i, \quad (6.3)$$

其中,  $\sigma_-^i = (\sigma_+^i)^\dagger = |g\rangle_{ii}\langle e|$ ,  $\sigma_z^i = |e\rangle_{ii}\langle e| - |g\rangle_{ii}\langle g|$ 。角动量算符  $J$  构成  $SU(2)$  代数, 满足如下对易关系

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, [J_+, J_-] = 2J_z, [J^2, J_\pm] = 0. \quad (6.4)$$

于是哈密顿量可以用角动量算符表示为

$$\hat{H} = \Omega J_z + \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + g \hat{a}^\dagger J_- + H.c.. \quad (6.5)$$

体系总角动量平方  $J^2$  是一个守恒量, 在整个系统演化过程中  $J^2$  的本征值  $j(j+1)$  保持不变, 其中  $j = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, 0$ 。  $j$  的取值完全由原子系统的初态决定。原子系统的能量最低态为  $|j = \frac{N}{2}, m = -\frac{N}{2}\rangle$ , 对应于所有的原子“凝聚”在基态的情况。这个态与固体物理中的费米面填满的真空态相类比, 原子系统中的集体激发对应于激子(电子-空穴对)产生的过程。于是我们可以引入激子算符

$$\hat{B}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} J_+, \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{N}} J_-, \quad (6.6)$$

来描述多原子系统的集体激发问题。激子算符满足的对易关系为

$$[\hat{B}, \hat{B}^\dagger] = -\frac{2}{N} J_z. \quad (6.7)$$

根据角动量理论, 一方面因为

$$J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \frac{N}{2} \left( \frac{N}{2} + 1 \right), \quad (6.8)$$

$$J_+ J_- = J_x^2 + J_y^2 + J_z = \frac{N}{2} \left( \frac{N}{2} + 1 \right) - J_z^2 + J_z, \quad (6.9)$$

所以可以得到

$$J_z = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{(N+1)^2 - 4J_+ J_-}). \quad (6.10)$$

取其中的一个根  $J_z = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{(N+1)^2 - 4J_+ J_-})$ 。于是激子算符满足的对易关系可以重新写为

$$[\hat{B}, \hat{B}^\dagger] = \sqrt{(1+\eta)^2 - 4\eta \hat{B}^\dagger \hat{B}} - \eta, \quad (6.11)$$

其中  $\eta = \frac{1}{N}$ 。当原子数目  $N$  很大, 即  $\eta$  很小时, 展开上式并保留到  $\eta$  的一阶项。于是激子的对易关系可以近似地写为

$$[\hat{B}, \hat{B}^\dagger]_q \equiv \hat{B} \hat{B}^\dagger - q \hat{B}^\dagger \hat{B} = 1, \quad (6.12)$$

其中  $q = 1 - 2\eta$ 。可以看出激子算符满足  $q$ -变形的玻色对易关系。

考虑  $N \rightarrow \infty$  极限, 即  $\eta \rightarrow 0$ , 并且激发态原子布居很少的情况, 激子算符满足标准的玻色对易关系。这种情况在数学上, 对应于  $SU(2)$  代数不可约表示在“高自旋” ( $J = N/2$ ) 时的极限。但是对于激发态原子数目较多, 且  $N$  有限的情况 ( $\eta$  是小量), 激子算符不再满足玻色对易关系, 而是  $q$ -变形的玻色对易关系。通过上面的讨论我们可以看出, 在  $N \rightarrow \infty$  极限, 且低激发情况下, 激子算符才满足玻色对易关系。Gardiner 等人通过引入激子算符, 研究了稀薄玻色—爱因斯坦凝聚气体的集体激发问题 [58]。孙昌璞等人 [59, 60] 根据角动量理论证明 Gardiner 引入的激子算符满足  $q$ -变形的玻色子代数。在此工作基础上, 刘玉玺等人 [61, 62] 研究了薄晶片多原子高密度激发与单模腔场模式相互作用问题。

沿着这个思路, 我们将进一步研究  $\Lambda$  型三能级多原子系统中激子和光场的相互作用问题。从多原子系统和光场相互作用入手可以给出激子—光场耦合系统的简单模型。

对于  $\Lambda$  型三能级多原子系统 (如图 14), 第  $i$  个原子激发态用  $|a\rangle_i$  标记, 两低态用  $|b\rangle_i$  和  $|c\rangle_i$  标记 (激发态可向两低态跃迁, 两低态间不能跃迁)。如果定义以下算符

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{i=1}^N \sigma_{ab}^i, F_1 = \sum_{i=1}^N \sigma_{ba}^i, \\ E_2 &= \sum_{i=1}^N \sigma_{ac}^i, F_2 = \sum_{i=1}^N \sigma_{ca}^i, \\ H_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_{aa}^i - \sigma_{bb}^i), \\ H_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_{aa}^i - \sigma_{cc}^i), \end{aligned} \quad (6.13)$$

其中  $\sigma_{\mu\nu}^i$  是第  $i$  个原子的  $\mu$  能级和  $\nu$  之间的反转算符,  $\mu, \nu = a, b, c$ 。则可得其对易关系为

$$\begin{aligned} [H_1, E_1] &= E_1, [H_1, F_1] = -F_1, \\ [H_2, E_2] &= E_2, [H_2, F_2] = -F_2, \\ [H_2, E_1] &= \frac{E_1}{2}, [H_2, F_1] = -\frac{F_1}{2}, \end{aligned}$$



$$[H_1, E_2] = \frac{E_2}{2}, [H_1, F_2] = -\frac{F_2}{2}. \quad (6.14)$$

根据本小节开始部分的代数观点, 激子定义依赖于  $SU(2)$  有限维不可约表示的高“自旋极限”。而上述对易关系 (6.14) 意味着  $E_1, E_2, F_1, F_2, H_1$  和  $H_2$  生成了  $SU(3)$  李代数, 它包含两个  $SU(2)$  子代数  $SU(2)_k$ :  $E_k, F_k, H_k (k = 1, 2)$ 。相应这个两个子代数, 可以定义激子算子

$$A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \sigma_{ab}^i, C^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \sigma_{cb}^i, \quad (6.15)$$

不难证明, 它们在大  $N$  极限下的确满足玻色子对易关系

$$[A, A^\dagger] = 1, [C, C^\dagger] = 1, [C, A^\dagger] = 0. \quad (6.16)$$

从而形成一个双模激子系统。

### §6.2 利用原子系综存储量子信息

考虑一个如图 14 的简单模型,  $N$  个三能级“ $\Lambda$ ”型原子置于一个单模的量子化腔中, 腔场与原子激发态  $|a\rangle$  和基态  $|b\rangle$  之间的跃迁耦合。此外一个经典控制光场与原子激发态和稳态  $|c\rangle$  之间的跃迁耦合。取稳态能级能量  $E_b = \hbar\omega_b = 0$ , 系统的哈密顿量为

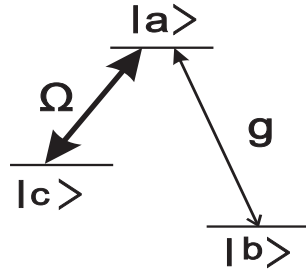


图 14:  $\Lambda$ -型三能级原子能级图, 其两跃迁分别与量子探测光场及经典控制光场耦合

$$H' = \omega a^\dagger a + \omega_a \sum_{i=1}^N \sigma_{aa}^i + \omega'_c \sum_{i=1}^N \sigma_{cc}^i + g \sum_{i=1}^N a \sigma_{ab}^i + \Omega(t) e^{-i\nu t} \sum_{i=1}^N \sigma_{ac}^i + h.c., \quad (6.17)$$

其中,  $\omega$  和  $\nu$  分别是量子光场和经典光场的频率,  $a$  为量子光场的湮灭算符,  $g$  为量子光场与原子的耦合常数,  $\Omega(t)$  为经典控制光场与原子的耦合常数,

也就是所谓的 Rabi 频率 (为简单起见,  $g$  和  $\Omega(t)$  都取实数),  $\omega_a$  和  $\omega'_c$  分别是原子  $a$ 、 $c$  能级的能量。

对上述哈密顿量作一个旋转变换:  $R(t) = \prod_i \exp(-i\nu t \sigma_{cc}^i)$ , 则有

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_a \sum_{i=1}^N \sigma_{aa}^i + \omega_c \sum_{i=1}^N \sigma_{cc}^i + g \sum_{i=1}^N a \sigma_{ab}^i + \Omega(t) \sum_{i=1}^N \sigma_{ac}^i + h.c., \quad (6.18)$$

其中  $\omega_c = \omega'_c - \nu$ 。值得注意的是, 整个原子系综是均匀展宽的, 光场对所有原子的耦合系数  $g$  和  $\Omega(t)$  是一致的, 此时, 原子系综可以用整体对称的集体态 — Dicke 态  $|N_a, N_b, N_c\rangle$  来描述,  $N_a$ 、 $N_b$  和  $N_c$  分别为处于态  $|a\rangle$ 、 $|b\rangle$  和  $|c\rangle$  上的原子布居数。事实上, 考虑一种简单情况: 大量的原子处于基态  $|b\rangle$ , 激发态和稳态上的原子数目很少, 也就是满足所谓的大  $N$  极限和低激发条件。通过应用上一小节引入的激子算符  $A$  和  $B$ , 我们可以在大  $N$  极限和低激发情况下将上述哈密顿量改写为

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_a A^\dagger A + \omega_c C^\dagger C + g\sqrt{N} a A^\dagger + \Omega(t) A^\dagger C + h.c.. \quad (6.19)$$

引入两个激子的极化算符

$$\varphi = a \cos \theta(t) - C \sin \theta(t), \quad (6.20)$$

$$\phi = a \sin \theta(t) + C \cos \theta(t), \quad (6.21)$$

其中,

$$\sin \theta = \frac{g\sqrt{N}}{\sqrt{g^2 N + \Omega^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\Omega}{\sqrt{g^2 N + \Omega^2}}, \quad (6.22)$$

$\varphi$  和  $\phi$  分别称为暗态极化算符 (dark-state polariton operator) 和亮态极化算符 (bright-state polariton operator), 它们满足以下对易关系:

$$\begin{aligned} [\varphi, \varphi^\dagger] &= 1, [\phi, \phi^\dagger] = 1, \\ [\phi, \varphi] &= 0, [\phi, \varphi^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

因此,  $\varphi$  和  $\phi$  是独立的玻色子算符。利用激子极化算符, 相互作用哈密顿量写为

$$H_I = \sqrt{g^2 N + \Omega^2} \phi A^\dagger + h.c.. \quad (6.24)$$

从暗态极化算符  $\varphi$  出发, 可以构造出所谓的暗态。记整个系统处于“真空”态:  $|0, N, 0\rangle_{atom} \otimes |0\rangle_{light} \equiv |0, N, 0, 0\rangle$ , 那么暗态为

$$\begin{aligned} |D, n\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{n!}} \varphi^{\dagger n} |0, N, 0, 0\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{1}{k!(n-k)}} (-\sin \theta)^k (\cos \theta)^{n-k} |0, N-k, k, n-k\rangle. \end{aligned} \quad (6.25)$$

它是原子系综及其耦合光场的叠加态,  $n$  的取值可以为大于等于 0 的整数, 这意味着有一系列的暗态。很容易验证:  $H_I |D, n\rangle = 0$ , 且  $|D, 0\rangle$  是  $H_I$  对应于零本征值的本征态, 因此以上构造出的暗态  $|D, n\rangle$  也是  $H_I$  的本征态, 相应本征值也为 0:  $H_I |D, n\rangle = 0$ 。

暗态 [53, 54] 是光与原子系综作用中的一个重要概念。它是相应于相互作用哈密顿量的本征值为零的态, 因此, 对于初始时处于暗态的系统, 在哈密顿量作用下, 由两个低态分别向激发态跃迁的几率相等, 且相位相反, 这样始终保证了激发态的布居数保持 0 不变。这样, 光场通过这种三能级原子构成的介质时, 尽管它与原子的某一跃迁能级共振耦合, 但是由于这种相干相消现象, 并不会象通过一般介质时那样被共振吸收, 而是会不同程度地穿透介质, 好像介质是透明的一样。人们把这种有趣的现象叫做电磁诱导透明 (Electromagnetically Induced Transparency, 简称 EIT), 实验上已经实现了 EIT 现象的存在 [63]。

由于暗态中不含有激发态, 因此可以避免考虑自发辐射。在没有自发辐射的情况下, 虽然不同的  $|D, n\rangle$  是简并的 (本征值为 0), 但是它们分属于不同的精确解耦的系统。在绝热条件下, 它们相互之间不存在跃迁。基于这种性质, 暗态提供了一种很好的把单模光场的量子态传送给原子系综的办法 [53]。通过改变  $g$  和  $\Omega(t)$  的比值, 使混合角  $\theta$  绝热地从 0 变换到  $\pi/2$ , 则会使一个完全的光场态的信息转换到一个集体原子系综态的信息里。也就是说, 当  $\theta: 0 \rightarrow \pi/2$  时, 会有  $|D, n\rangle: |0, N, 0, n\rangle \rightarrow |0, N-n, n, 0\rangle$ 。反之, 当  $\theta$  绝热地从  $\pi/2$  变换到 0 时, 原子集体系综的信息会转换到光场的信息中。如果单模光场的初始态为混合态  $\rho_f = \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle \langle m|$ , 那么绝热变换的结果使系统由

$$\sum_{n,m} \rho_{nm} |0, N, 0\rangle \langle 0, N, 0| \otimes |n\rangle \langle m| \quad (6.26)$$

转换为

$$\sum_{n,m} \rho_{nm} |0, N-n, n\rangle \langle 0, N-m, m| \otimes |0\rangle \langle 0|. \quad (6.27)$$

这样，混合单模光场的信息也能够全部转移到原子系综中。众所周知，光是最快的最简单的而又稳定的传播信息的途径，但是它很难存贮。而原子是相对长期稳定的，可以用来进行量子信息的处理。因此，最近以来，上述利用电磁诱导介质的原子系综来处理量子信息和进行量子计算成为一个新兴的研究课题 [55, 56, 64, 65, 66]。

### §6.3 光在原子系综中的传播

下面假设原子是全同的。我们在一般的情况下来讨论量子光场在电磁诱导透明介质中的传播。

所考虑模型见图 15，由  $\Lambda$  型三能级原子系综构成准一维的沿  $x$  方向分布的均匀介质，一个正频部分为  $\hat{E}^{(+)}$  的量子化电磁场与基态  $|b\rangle$  和激发态  $|a\rangle$  之间跃迁共振耦合，耦合系数为  $g$ ，此外，激发态还通过一个 Rabi 频率为  $\Omega$  的经典相干控制场与稳态  $|c\rangle$  耦合起来，为方便起见，仍取  $g$  和  $\Omega$  为实数，且由于介质均匀，故  $g(x) \equiv g, \Omega(x, t) \equiv \Omega(t)$ 。两光场传播方向的夹角为  $\alpha$ 。和上述所讨论的一致，假定原子系综中绝大部分原子处于基态  $|b\rangle$ 。

为求解量子光场在这样一个系统中的传播，首先引入三分量的场算符：

$$\psi(x, t) = \psi_a(x, t)|a\rangle + \psi_b(x, t)|b\rangle + \psi_c(x, t)|c\rangle, \quad (6.28)$$

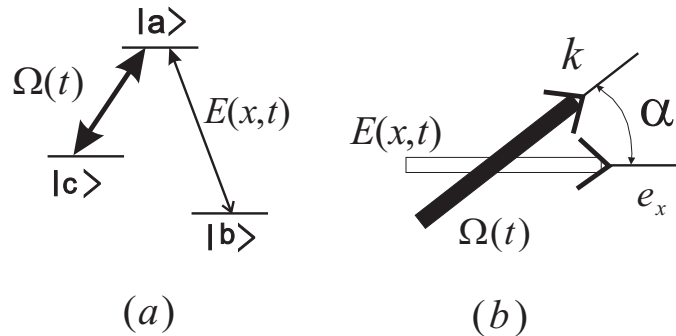


图 15: a.  $\Lambda$  型原子能级图; b. 量子探测光场与经典控制光场传播方向成夹角  $\alpha$

此时系统的相互作用哈密顿量为

$$H_I = \int \{ [-d\psi_a^\dagger(x, t)\hat{E}^{(+)}(x, t)\psi_b(x, t) + h.c.] + \hbar[\psi_a^\dagger(x, t)\Omega(t)e^{i(px-\nu t)}\psi_c(x, t) + h.c.] \} dx, \quad (6.29)$$

其中,  $x$  为原子的位置,  $d$  为  $|a\rangle$  和  $|b\rangle$  之间的偶极矩阵元,  $p = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_x = \frac{\nu}{c} \cos \alpha$  是控制场的波矢  $\mathbf{k}$  在量子场的传播方向  $\mathbf{e}_x$  上的投影。为简单起见, 我们假定量子场的频率  $\omega$  以及经典控制场的频率  $\nu$  分别和原子的跃迁频率  $\omega_{ab}$  和  $\omega_{ac}$  一致, 原子的空间运动以及多普勒位移暂时不予考虑。

我们引入以下慢变的场算子

$$\hat{E}^{(+)}(x, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} e(x, t) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (6.30)$$

$$\psi_a^\dagger(x, t) = \varphi_a^\dagger e^{-i(kx - \omega_{ab}t)}, \quad (6.31)$$

$$\psi_b^\dagger(x, t) = \sqrt{N} \varphi_b^\dagger, \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \psi_c^\dagger(x, t) &= \varphi_c^\dagger e^{-ipx + i\omega_{cb}t} \\ &= \varphi_c^\dagger e^{-ipx + i\omega t - i\nu t}, \end{aligned} \quad (6.33)$$

其中  $V$  为归一化体积,  $e(x, t), \varphi_a^\dagger, \varphi_b^\dagger$  和  $\varphi_c^\dagger$  均为对参数  $x$  和  $t$  的慢变量。利用上述表达式, 相互作用哈密顿量变为

$$H_I = \hbar \int \{ \varphi_a^\dagger(x, t) [g\sqrt{N}e(x, t)\varphi_b(x, t) + \Omega(t) e^{iqx} \varphi_c(x, t)] + h.c. \} dx, \quad (6.34)$$

其中  $g = -d\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\varepsilon_0 V}}$  是原子与量子化光场的耦合常数, 且

$$q = p - k = \frac{\omega_{ac}}{c} (\cos \alpha - 1).$$

注意到原子场算符之间的对易关系

$$[\varphi_\alpha(x, t), \varphi_\beta^\dagger(x', t)] = \delta_{\alpha\beta} \delta(x - x'), \quad (6.35)$$

以及光场的对易关系

$$[E^\dagger(x, t), E(x', t)] = \delta(x - x'), \quad (6.36)$$

那么对于上述用慢变量近似表述的量子光场, 其海森伯算符的时间演化方程为

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) e(x, t) = -ig\sqrt{N} \varphi_b^\dagger(x, t) \varphi_a(x, t). \quad (6.37)$$

原子部分的场算符的海森伯方程为

$$\dot{\varphi}_a(x, t) = ig\sqrt{N}e(x, t)\varphi_b(x, t) + i\Omega e^{iqx} \varphi_c(x, t), \quad (6.38)$$

$$\dot{\varphi}_b(x, t) = ig\sqrt{N}e^\dagger(x, t)\varphi_a(x, t), \quad (6.39)$$

$$\dot{\varphi}_c(x, t) = i\Omega e^{-iqx} \varphi_a(x, t). \quad (6.40)$$

方程 ( 6.38 ) 两边同时对时间求偏导, 并注意到  $\varphi_a$  是对参量  $x$  和  $t$  的慢变量, 因此取其对时间的二阶偏导为 0, 则有

$$\begin{aligned} 0 &= ig\sqrt{N}\dot{e}\varphi_b + ig\sqrt{N}e\dot{\varphi}_b + i\Omega e^{iqx}\dot{\varphi}_c + i\dot{\Omega}e^{iqx}\varphi_c \\ &= ig\sqrt{N}\dot{e}\varphi_b - (g^2Ne^\dagger e + \Omega^2)\varphi_a + i\dot{\Omega}e^{iqx}\varphi_c \end{aligned}$$

在我们所考虑的系统, 控制场的 Rabi 频率  $\Omega(t)$  随时间缓慢变化, 量子光场强度很弱, 因此由上式近似有

$$ig\sqrt{N}\dot{e}\varphi_b = \Omega^2\varphi_a,$$

则量子光场在此介质中的传播方程为

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial x} \right) e(x, t) = 0, \quad (6.41)$$

其中,  $v_g$  是量子光场在介质中传播的群速度,

$$v_g = \frac{c}{1 + n_g}, n_g = \frac{g^2N}{\Omega^2}. \quad (6.42)$$

在 EIT 介质中,  $n_g$  可以远远大于 1, 也就是说, 光场在介质中的群速度可以远远小于真空中的光速  $c$ , 甚至可以接近于 0。近来的 EIT 原子系综介质中的实验数据也表明了这一点 [56, 66, 67]。

## §7 小结

基于腔 QED 本身发展的内在逻辑联系以及对未来的发展看法, 我们有选择地对其几个重要方面进行了详略不一的介绍。虽然在许多方面没有细节性地深入和扩展, 但是我们力图通过典型问题对腔 QED 的基本概念和思想方法进行了比较完整准确的阐述, 使一般读者对腔 QED 有一个整体性的了解, 使欲进一步学习腔 QED 的读者有一个较好的开端。

从本文的内容可以看出, 虽然腔 QED 描述物理现象属于原则上问题已彻底解决的电磁相互作用范畴 (重整化问题除外), 但由于技术上突飞猛进的进步导致了各种极端物理条件的实现, 电磁相互作用仍然会给出极其丰富的新

的物理现象,使得我们对量子物理基本观念(如真空效应)的理解有了更加现实的物理基础。从应用角度讲,腔 QED 本质上实现了对原子与光场相互作用强度的人为控制,这使得人们能够通过改变相互作用来有目的地影响原子-光强耦合系统的演化。事实上,在一定意义下,量子计算可以理解为特定量子系统的受控演化过程。从这个角度来看,腔 QED 系统至少可以用来演示量子计算的物理过程。另外,由于在空间上光的扩展性和原子的定域性,腔 QED 系统原则上可以看成使存贮和传输量子信息的物理“节点”。在这个“节点”上,由光子荷载的量子信息可以在原子上存贮,结点上的量子信息也可以由光子传到另一个量子结点。这些原理上的设想是量子计算与量子通讯结合的基础。

致谢:在过去的 10 年里,我们关于腔 QED 的工作得到了国家自然科学基金,国家杰出青年基金,中国科学院知识创新工程以及国家重大基础研究发展规划(九·七·三计划,资助号: 001CB309310)的资助,特此致谢。

## 附录 A:Fox-Li 准模的推导

我们着重讨论式 (4.10) 的行为。我们令  $kl = x, \eta/l = \xi$ 。我们讨论  $\xi \rightarrow \infty$  时的行为。一般而言,假定  $\xi \sim 10^2$ , 并记  $f(x) \equiv A_k^2/B_k^2$ , 于是有

$$f(x) = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x + (\xi x \tan x - 1)^2} \quad (\text{A.1})$$

我们看到,由于每当  $x$  由  $n\pi - \frac{\pi}{2}$  变到  $n\pi + \frac{\pi}{2}$  时,  $\tan^2 x$  都经历了一次从  $-\infty$  到  $+\infty$  的变迁,故而  $f(x)$  在每个区间  $[n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}]$  内的行为是类似的。所以我们首先讨论在一个这样的区间上  $f(x)$  的行为。设  $n > 0, f(x)$  在极值点上满足

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

于是有

$$\tan x = \frac{[\xi - (\xi x)^2] \pm \sqrt{[\xi + (\xi x)^2]^2 + 4(\xi x)^2}}{2\xi x(1 + \xi x)}$$

在  $\xi \rightarrow \infty$  的极限下,将上式右端对  $\frac{1}{\xi}$  展开,保留至 0 阶和 1 阶项,我们有

$$\tan x = \frac{1}{\xi x} \quad (\text{A.2})$$

和

$$\tan x = -x \quad (\text{A.3})$$

其中第一式是极大值点满足的方程，第二式是极小值点满足的方程。不难验证， $f(x)$  的极小值与  $f(x)$  在  $\tan x = \pm\infty$  处的渐近值均在  $\frac{1}{\xi^2 x^2}$  量级，因而远小于 1，而  $f(x)$  之极大值则在  $1 + \xi^2 x^2$  量级，因而远大于 1。所以，此后我们将只考虑  $f(x)$  的极大值。我们令方程 (A.2) 在  $[n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}]$  的解为  $\tilde{x}$ ，并令  $\Lambda = \xi\tilde{x}$ ，于是有

$$\tan \tilde{x} = \frac{1}{\Lambda} \ll 1$$

所以  $\tilde{x} \simeq n\pi + 1/\Lambda$ 。函数在这一点取极大值  $1 + \Lambda^2$ ，之后向正负两个方向单调递减，直至远小于 1 的渐近值。现在我们估计一下这个函数的宽度。我们设  $x = n\pi + \theta$  并注意到由于  $\Lambda = \xi\tilde{x}$  而  $\xi \sim 10^2$ ，因而当  $\theta \in [\frac{1}{\Lambda} - \frac{10}{\Lambda}, \frac{1}{\Lambda} + \frac{10}{\Lambda}]$  时， $\tan x = \theta$  是很好的近似。利用这一点，我们可以很容易看出  $\theta = \frac{1}{\Lambda} \pm \frac{1}{\Lambda^2}$  时  $f(x)$  衰减至峰值的一半； $\theta = \frac{1}{\Lambda} \pm \frac{1}{\Lambda}$  时  $f(x)$  衰减至 1 左右； $\theta = \frac{1}{\Lambda} \pm \frac{10}{\Lambda}$  时  $f(x)$  衰减至远小于 1 的量级 ( $< 10^{-2}$ )。由于在区间  $\theta \in [\frac{1}{\Lambda} - \frac{10}{\Lambda}, \frac{1}{\Lambda} + \frac{10}{\Lambda}]$  (记为  $A$ ) 外， $f(x)$  始终远远小于 1，因而我们可以着重讨论  $f(x)$  在此区间内的行为。在这个区间，可以用函数

$$\tilde{g} \simeq g = \frac{1}{\theta^2 + [\Lambda\theta - 1]^2}$$

拟合  $f$ 。这里除了近似  $\tan x \simeq \theta$  及  $1 + \theta^2 \simeq 1$  外，我们还使用了  $\xi x = \xi(\tilde{x} - \frac{1}{\Lambda} + \theta) \simeq \xi\tilde{x} = \Lambda$ 。这是由于  $\frac{1}{\Lambda}, \theta$  均远小于 1，故亦均远小于  $\tilde{x}$ 。 $n=0$  时这个近似不成立。我们看到，在区间  $A$  外， $\tilde{g}$  与  $f$  均远小于  $10^{-2}$ ，因此差别可以忽略。所以， $\tilde{g}$  可以很好的拟合  $f$ 。进一步，我们再作近似

$$\tilde{g} \simeq g \simeq \frac{1}{\frac{1}{\Lambda^2} + [\Lambda\theta - 1]^2}$$

这个近似的程度可用  $|\frac{(\theta^2 - \frac{1}{\Lambda^2})}{\theta^2 + [\Lambda\theta - 1]^2}|$  刻划，它的极值在  $\frac{1}{\Lambda}$  量级，因而该近似是合理的。在  $n=0$  时，可用函数  $\frac{1}{\xi^2 + [\xi\theta^2 - 1]^2}$  拟合  $f$ 。至此，我们得出  $\frac{A_k^2}{B_k^2}$  的近似表达式：

$$\frac{A_k^2}{B_k^2} = \frac{\Gamma^2 \Lambda^2}{\Gamma^2 + (\Omega_k - \Omega_n)^2} (\Omega_k \in \left[ \frac{c}{a} \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right), \frac{c}{a} \left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right]) \quad (\text{A.4})$$

其中  $\Omega_n = n\pi + \frac{1}{\Lambda}$  为 Fox-Li 准模， $\Gamma = \frac{c}{\Lambda^2 l}$ 。



## 附录 B : F-P 腔与波导管中电磁场的态密度

我们首先计算正文图 8 所示的无限大平行导体板间的电磁场态密度。利用电场在导体板上的边值条件  $E_x(z=0, a) = 0, E_y(z=0, a) = 0, \frac{\partial E_z}{\partial z}|_{z=0, a} = 0$ , 我们可以求出导体板间点场的一般表达式:

$$\mathbf{E} = \sum_m \int dk_x dk_y \mathbf{E}_m(k_x, k_y) + h.c \quad (\text{B.1})$$

在这里, 电场被表达为拥有不同波矢和频率的模式叠加。其中

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m(k_x, k_y) = & \left[ \mathbf{e}_x A_m(k_x, k_y) \sin \frac{m\pi}{a} z + \mathbf{e}_y B_m(k_x, k_y) \sin \frac{m\pi}{a} z + \mathbf{e}_z C_m(k_x, k_y) \cos \frac{m\pi}{a} z \right] \\ & \times e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{-i\omega_m(k_x, k_y)t} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

并且

$$\omega_m^2(k_x, k_y) = c^2 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right)$$

可见, 由于  $a < \frac{\lambda_a}{2}$ , 故  $\omega_a = \frac{2\pi}{\lambda_a} c < \frac{\pi}{a} c$  所以, 若电磁场频率为  $\omega_a$ , 则  $m > 0$  的模式振幅均为 0, 此时电场可表达为

$$\mathbf{E} = \int f(k_1, k_2) e^{i(k_1 x + k_2 y)} e^{-i\omega_k t} dk_1 dk_2 + h.c \quad (\text{B.3})$$

其中  $f(k_1, k_2)$  是不同横向波矢的权重。此时电磁场的态密度与二维平面上的自由电磁场态密度相同, 为

$$\rho_p(\omega) = \frac{\omega}{2\pi c^2 a} \quad (\text{B.4})$$

我们再考虑如图 9 所示的矩形波导管。波导中横向  $(m, n)$  模式的电场本征解为

$$\mathbf{E}_{mn} = \mathbf{E}(x, y) \int e^{ikz} e^{-i\omega_k t} dk + h.c \quad (\text{B.5})$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y) = & \mathbf{e}_x A_{mn}(k) \cos \frac{m\pi}{L_x} x \sin \frac{n\pi}{L_y} y \\ & + \mathbf{e}_y B_{mn}(k) \sin \frac{m\pi}{L_x} x \cos \frac{n\pi}{L_y} y \\ & + \mathbf{e}_z C_{mn}(k) \sin \frac{m\pi}{L_x} x \sin \frac{n\pi}{L_y} y \end{aligned}$$

并且  $\omega_k^2 = c^2 k^2 + \omega_{mn}^2$ ,  $\omega_{mn} = \left( \frac{m^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L_y^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ 。考虑  $z$  方向长为  $L$  ( $L \gg L_x, L_y$ ) 的区域, 若有周期边条件  $k = \frac{2p\pi}{L}$ ,  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  则由于

$$k = \pm \frac{1}{c} (\omega_k^2 - \omega_{mn}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.6})$$

故频率小于  $\omega$  的光场状态数为

$$\begin{aligned} N(\omega) &= 2 \times \frac{2k}{(2\pi)/L} \\ &= \frac{2L}{\pi c} (\omega^2 - \omega_{mn}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

于是态密度为

$$\begin{aligned} \rho_{mn}(\omega) &= \frac{1}{L L_x L_y} \frac{dN(\omega)}{d\omega} \\ &= \frac{2\omega}{L_x L_y c \pi (\omega^2 - \omega_{mn}^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

不难看出, 在一般情况下波导中的电磁场态密度正如 (4.38) 式所示。

## 参考文献

- [1] S. Tomonaga, Prog. Theo. Phys. **1**, 27 (1948); S. Tomonaga, J. R. Oppenheimer, Phys. Rev., **24**, 744 (1948); J. Schwinger, Phys. Rev., **75**, 651; **76**, 790 (1949); R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 749, 769 (1949)
- [2] W. E. Lamb, R. C. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947); N. M. Kroll, W. E. Lamb, *ibid*, **75**, 388 (1949)
- [3] P. R. Berman, Cavity Quantum Electrodynamics, Academic Press, INC, 1994, New York.
- [4] E. M. Purcell, Phys. Rev. **69**, 681 (1946)
- [5] N. Bloembergen, R. V. Pound, Phys. Rev. **95**, 8 (1954)
- [6] R. G. Hulet, E. S. Hifer, E. S. Kleppner, Phys. Rev. Lett, **55**, 2137 (1985)
- [7] H. J. Metcalf, P. Van der Straten, Laser cooling and Trapping, Springer, 1999 NY.
- [8] P. Meystre, Atomic Optics, Springer (2001)
- [9] V. Weisskopf, E. Wigner, Z. Phys, **63**, 54 (1930)
- [10] P. L. Knight, L. Allen, Concepts of Quantum Optics. Pergamon (1983)
- [11] M. O. Scully, W. E. Lamb, Jr, Phys. Rev. **159**, 208 (1967)
- [12] K. Young, et al, Rev. Mod. Phys. **70**, 1545 (1998)
- [13] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, Proc. IEEE., **51**, 89 (1963)

- [14] M.Born, R.Oppenheimer, *Ann.Physik* **84**,457 (1930)
- [15] 孙昌璞, 张, 量子力学新进展第二辑, 北京大学出版社 ( 2000 )
- [16] C. P. Sun, X. J. Liu. *Acta. Phys. Sinica.* **5**, 343 (1996)
- [17] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation.* Wiley (1973)
- [18] G. Rempe, H. Walther, N. Klein, *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 353 (1987)
- [19] H. B. G. Casimir, D. Polder, *Phys. Rev.*, **73**, 860 (1948)
- [20] S. Haroche, M. Brune, J. Raimond, *Europhys. Lett.* **14**,19 (1991);*Appl. Phys. B*, **54**, 355 (1992); B.G. Englert, S. Swinger, J. Burut, M. O. Scully, *Europhys. Lett*, **14**, 20 (1991)
- [21] S.Sarkar, *Quantum Opt.* **4** ,345 (1992)
- [22] G.T.Moore, *J.Math. phys.* **11**, 2697, (1970); C.M.Caves, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 75 (1980)
- [23] M. Brenner, S. Hilgenfelt, D. Lohse, *Rev. Mod. Phys.***74** 425 (2002)
- [24] A.G.Fox and T.Li, *Proceedings of the IRE*, 1904 (1961)
- [25] A.G.Fox and T.Li, *Bell System Tech. J.***40**, 453 (1961)
- [26] A. L. Schawlow and C. H. Townes, *Phys. Rev.* **112** 1940, (1958)
- [27] P.T.Leung, S.Y.Liu and K. Young, *Phys. Rev. A***49** 3057, (1994)
- [28] P.T.Leung, S.Y.Liu, S.S.Tong and K. Young, *Phys. Rev. A***49** 3068, (1994)
- [29] P.T.Leung, S.Y.Liu and K.Young, *Phys. Rev. A***49** 3982, (1994)
- [30] P.T.Leung, S.S.Tong and K.Young, *J.Phys. A***30** 2139 (1997)
- [31] P.T.Leung, S.S.Tong and K.Young, *J.Phys. A***30** 2153 (1997)
- [32] P.T.Leung, W.M.Suen, C.p.Sun and K.Young, *Phys. Rev. E***57** 6101, (1998)
- [33] R.Lang and M.O.Scully, W.E.Lamb,Jr,*Phys.Rev.A* **7**,1788(1973)
- [34] W.E.Lamb,Jr,*Phys.Rev.***134**(1964)
- [35] M.B.Spencer and W.E.Lamb,Jr,*Phys.Rev.A* **5**,884(1972)
- [36] B.Baseia and H.M.Nussenzveig,*Optica Acta* **31**,39-62(1984)
- [37] J.C.Penaforte and B.Baseia,*Phys.Rev.A* **30**,1401(1984)
- [38] J.C.Penaforte and B.Baseia,*Phys.Lett.A* **107**,250(1985)
- [39] E.L.Da Graca,A.Z.De Brito and B.Baseia,*IEEE J.Quan.Elect.*QE-22,344(1986)
- [40] B.Baseia,F.J.B.Feitosa and A.Liberato,*Can.J.Phys.* **65**,359(1987)
- [41] A.Liberato and B.Baseia,*Can.J.Phys.* **66**,764(1988)
- [42] J.C.Penaforte and B.Baseia,*IEEE J.Quan.Elec.*QE-24,2350(1988)
- [43] C.P.Sun,*Phys.Scripta*48,393(1993)
- [44] Z.Y.Wu, *Phys. Rev. A*40,6852(1989); C. P. Sun, *Chisnese. Phjys. Lett* **6**, 481 (1989)

- [45] D. Kleppner, Phys. Rev. Lett. **47**233, (1981)
- [46] D. P. O'Brien, P. Meystre and H. Walther, Advances in Atomic and Molecular Physics **21** 1 (1985)
- [47] A.O.Caldeirs, A.J.Leggett, Ann.Phys. (N.Y.)**149**,374 (1983)
- [48] C. P. Sun, H. Zhan, X. F. Liu, Phys. Rev. A, **58**, 1810 (1998)
- [49] L. H. Yu, C. P. Sun, Phys. Rev. A **49**, 592 (1994);C. P. Sun, L. H. Yu, Phys. Rev. A **51**, 1845 (1995)
- [50] C. P. Sun, Y. B. Gao, H. F. Dong, S. R. Zhao, Phys. Rev. E, **57**, 3900 (1998)
- [51] R. Thompson, G. Rempe, H. Kimble, Phys. Rev. Lett. **68**, 1132 (1992)
- [52] 孙昌璞, 赵树仁, 中国科学, 26 卷, 921 (1996)
- [53] M. Fleischhauer, M. D. Lukin, quant-ph/0106066.
- [54] M. Fleischhauer, M. D. Lukin, Phys. Rev. Lett. **84**, 5094 (2000).
- [55] M. D. Lukin, S. F. Yelin, and M. Fleischhauer, Phys. Rev. Lett. **84**, 4232 (2000).
- [56] D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, and R. L.Walsworth, Phys. Rev. Lett. **86**, 783 (2001).
- [57] R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
- [58] C. W. Gardiner, Phys. Rev. A **56**, 1414 (1997).
- [59] C. P. Sun, H. C. Fu, J. Phy. A **22**, L983 (1989).
- [60] C. P. Sun, S. X. Yu, Y. G. Gao, quant-ph/9809079.
- [61] Y. X. Liu, C. P. Sun, S. X. Yu, D. L. Zhou, Phys. Rev. A **63**, 023802 (2001).
- [62] Y. X. Liu *et. al.*, Phys. Rev. A **65**, 023805 (2001).
- [63] S. E. Harris, Physics Today **50**, 36 (1997).
- [64] L. M. Duan, M. D. Lukin, J. I. Cirac, and P. Zoller, Nature **414**, 413 (2001).
- [65] L. M. Duan, quant-ph/0201128.
- [66] L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, and C. H. Behroozi, Nature **397**, 594 (1999).
- [67] D. Budker, D. F. Kimball, S. M. Rochester, and V. V. Yashchuk, Phy. Rev. Lett. **83**, 1767 (1999).