第16卷第3期　　　　大　学　物　理　　　　Vol. 16 No. 3
1997年　3月　　　　COLLEGE　PHYSICS　　　　Mar. 1997

教　学　研　究

经典失谐与量子失谐*

王　成　　张　力　　孙昌璞
(东北师范大学物理系,长春　130024)

摘　要　从理论上讨论了经典和量子过程中的失谐问题.文中以一维谐振子为例详细讨论了经典和量子情况中失谐与共振问题的相似性.并证明,当外部驱动力与受力系统的内禀频率极端失谐时,外力的效应可以忽略.

关键词　量子力学;失谐;谐振子

分类号　O413.1

1　引言

量子力学及其在所有的科学应用中都取得了极大的成功.迄今没有发现任何它的预言和实验相违背的例证.若没有量子力学,人们将无法解释固体的行为、大分子的结构和功能,更无法解释星体的颜色、激光的功能和超导的性质.但是,量子力学的推论和预言有许多看上去与我们关于经典物理的理解相悖,引起了许多人的争论.如EPR佯谬、Schrödinger猫等.虽然从积极的意义上讲,不同于传统的东西意味着物理学的进步,但人们仍希望用一种可以想象和可以理解的经典图象和类比来考察量子力学的结论[1].

基于上述想法,本文将就失谐与共振问题以受迫谐振子Schrödinger方程和牛顿方程的精确解的极限过程为例,详细分析经典与量子对应中的相似性.由此,可从物理图象上加深对量子力学的物理内涵的理解,揭示一些与常识看上去似乎相悖的简单物理现象.

事实上,量子过程中的失谐情况是量子力学的常见问题.利用失谐情况下外部对系统的影响可以忽略不计的特点,人们在不同的对象和不同的内容下建立了Born - Oppenheimer近似[2]、旋转波近似[3,4]、缓变近似[5]等方法.本文的工作将有助于对这些近似的理解[6].

2　经典物理中的失谐问题

不失一般性,考虑一维力学时变系统,其哈密顿量

$$H = H^q(t) = \frac{p^2}{2M} + V_s(t) + V_f(t) \tag{1}$$

依赖于时间.其中,$V_s(t)$和$V_f(t)$分别为慢变力学量和快变力学量部分.从数学上讲

$$V_s(t) = \sum V_s(\omega_s)\exp[i\omega_s t] \tag{2}$$

的傅氏变换中低频项起主要作用,而

$$V_f(t) = \sum V_f(\omega_f)\exp[i\omega_f t] \tag{3}$$

的傅氏变换中的有限个高频项起主要作用.$V_s(t)$对q和t的微分具有相同的频谱分布.

体系的运动方程可写为

$$\dot{p} = -\frac{\partial V_s(t)}{\partial q} - \frac{\partial V_f(t)}{\partial q} \tag{4}$$

$$\dot{q} = p/M \tag{5}$$

将方程(4)进行形式积分

$$p(t) - p(0) = -\int\frac{\partial V_s(t)}{\partial q}\,\mathrm{d}t - \int\frac{\partial V_f(t)}{\partial q}\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

注意到$V_f(t)$应为实数:$V_f^*(t) = V_f(t)$,所以

*国家自然科学基金会优秀中青年人才专项基金和霍英东基金会青年教师基金资助项目
收稿日期:1995 - 10 - 20

$V_f(\omega_f)$必须满足 $V_f(\omega_f) = V_f^*(-\omega_f)$. 则利用

$$V_f(t) = \frac{1}{2}\sum V_f(\omega)\exp[i\omega_f t] + \frac{1}{2}\sum V_f^*(\omega)\exp[-i\omega_f t] \tag{7}$$

对式(4)右端第二项积分得

$$-\int\frac{\partial V_f(t)}{\partial q}dt = -\frac{1}{2}\sum\int\frac{\partial V_f(\omega_f)}{\partial q}\exp[i\omega_f t]dt - \frac{1}{2}\sum\int\frac{\partial V_f^*(\omega_f)}{\partial q}\exp[-i\omega_f t]dt$$

$$= -\frac{1}{2}\sum\frac{\partial V_f(\omega_f)}{\partial q}\frac{\exp[i\omega_f t]}{i\omega_f} - \frac{1}{2}\sum\frac{\partial V_f^*(\omega_f)}{\partial q}\frac{\exp[i\omega_f t]}{i\omega_f} \tag{8}$$

如果高频部分的频率 ω_f 远大于低频部分的频率 ω_s,或者说 ω_f 相对于系统的内禀频率改变很大,则有

$$\int\frac{\partial V_f(t)}{\partial q}dt \to 0; \text{当 } \omega_f \to \infty \tag{9}$$

该式说明:如果高频频率远大于低频频率,则具有高频的力学量对系统的影响可以在系统的变化过程中不予考虑.

我们以一维受迫谐振子的精确解为例来讨论这种情况. 设 m 为振子质量, q 为谐振子的坐标, ω 为振子的固有频率, $F(t)$ 为系统外部的强迫力,则其运动方程为

$$m\ddot{q}(t) = -m\omega^2 q(t) + F(t) \tag{10}$$

其精确解为

$$q(t) = A\cos(\omega t + \phi) + \int\frac{F(t')}{m\omega}\sin\omega(t - t')dt' \tag{11}$$

若设外力的形式为 $F(t) \equiv F_0\sin\omega_f t$,则其运动方程的解为

$$q(t) = A\cos(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{2m\omega}\left[\frac{\sin\omega_f t + \sin\omega t}{\omega_f + \omega} - \frac{\sin\omega_f t - \sin\omega t}{\omega_f - \omega}\right] \tag{12}$$

显然,在大失谐的情况$|\omega_f - \omega| \to \infty$时,

$$q(t) \approx A\cos(\omega t + \phi) \tag{13}$$

即若外力的振动频率远高于固有频率时,外力对系统是没有什么影响的. 经典振动的这一特点在技术上有很多应用,地震仪和减震器就是利用这种原理.

3 量子力学中的失谐问题

现在我们考察量子系统的失谐. 一般地,时变量子系统的哈密顿量可设为

$$\hat{H} = \hat{H}_s(t) + \hat{H}_f(t) \tag{14}$$

其中 $\hat{H}_s(t)$和 $\hat{H}_f(t)$分别为慢变和快变力学量的哈密顿量. 从数学上讲 $\hat{H}_f(t)$的傅氏变换

$$\frac{1}{2}\sum\hat{H}_f(\omega_f)\exp[i\omega_f t] + \frac{1}{2}\sum\hat{H}_f^*(\omega_f)\exp[-i\omega_f t] \tag{15}$$

仅存有限个起主要作用的高频项. 对相应的 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle = \left(\hat{H}_s(t) + \hat{H}_f(t)\right)|\phi(t)\rangle \tag{16}$$

两边进行形式积分可得

$$i\hbar(|\phi(t)\rangle - |\phi(0)\rangle) = \int\left(\hat{H}_s(t') + \hat{H}_f(t')\right)|\phi(t')\rangle$$

$$= \int\hat{H}_s|\phi(t')\rangle + \frac{1}{2}\sum\int\left\{\hat{H}_f(\omega_f)\exp[i\omega_f t] + \hat{H}_f^*(\omega_f)\exp[i\omega_f t]\right\}|\phi(t')\rangle \tag{17}$$

令 $f_1(t) \equiv \hat{H}_f(\omega_f)|\phi(t')\rangle$; $f_2(t) \equiv \hat{H}_f^*(\omega_f)|\phi(t')\rangle$,则上式右端第二项可写为

$$-\frac{1}{2}\sum_{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_1^{(n)}}{(-i\omega)^{n+1}}\exp[i\omega_f t]\Big|_0^t - \frac{1}{2}\sum_{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_2^{(n)}}{(i\omega)^{n+1}}\exp[-i\omega_f t]\Big|_0^t \tag{18}$$

当高频部分的频率 ω_f 远大于低频部分的频率 ω_s,或者说 $\omega_f/\omega_s \to \infty$时,则可证明式(18)为零,从而高频部分的影响可以忽略不计.

仍以一维谐振子为例讨论量子失谐问题. 设量子力学问题的一维谐振子的哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 + F(t)\hat{q} \tag{19}$$

设量子化的坐标和动量表达为产生、湮没算子 $\hat{a}^+$和 $\hat{a}$ 的线性组合

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}(\hat{a}^+ + \hat{a}), \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}(\hat{a}^+ - \hat{a}) \tag{20}$$

从而有 $\hat{H}$ 的正则形式

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + F'(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}(\hat{a}^+ + \hat{a})$$
$$= \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + F(t)(\hat{a}^+ + a) \qquad (21)$$

这里将哈密顿量减去了常数项 $\hbar\omega_0/2$. 设 $\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a}$,则我们可得到在相互作用表象中的哈密顿量

$$\hat{H}_I = F(t)\left(\hat{a}^+ e^{i\omega t} + \hat{a}e^{-i\omega t}\right) \qquad (22)$$

利用 Wei - Norman 方法[7] ,设

$$U_I = e^{h(t)}e^{A(t)a^+}e^{B(t)a} \qquad (23)$$

是 Schrödinger 方程的形式解 ,并令 $F_I(t) = F(t)e^{i\omega t}$,由

$$\hat{H}_I = [i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_I(t)]U_I^{-1}(t) \qquad (24)$$

可得各系数 $A(t)$, $B(t)$, $h(t)$ 满足的方程

$$\dot{h}(t) - \dot{B}(t)A(t) = 0$$
$$i\hbar\dot{A}(t) = F_I(t) \qquad (25)$$
$$i\hbar\dot{B}(t) = F_I^*(t)$$

从而有

$$h(t) = -|A(t)|^2/2$$
$$A(t) = -B^*(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_0 F_I(t')dt' \qquad (26)$$

若外力取为具体的简谐形式

$$F(t) = F_0\sin\omega_f t,\ F_I(t) = F_0\sin\omega_f t e^{i\omega t} \qquad (27)$$

则可得各系数为

$$A(t) = -\frac{F_0}{i2\hbar}\left\{\frac{1}{\omega+\omega_f}[e^{i(\omega+\omega_f)t} - 1] - [\frac{1}{\omega-\omega_f}e^{i(\omega-\omega_f)t} - 1]\right\}$$

$$B(t) = -\frac{F_0}{i2\hbar}\left\{\frac{1}{\omega+\omega_f}[e^{-i(\omega+\omega_f)t} - 1] - \frac{1}{\omega-\omega_f}[e^{-i(\omega-\omega_f)t} - 1]\right\}$$

$$h(t) = (\frac{F_0}{\hbar\omega_f})^2\left\{(\frac{1}{\omega+\omega_f})^2 + (\frac{1}{\omega-\omega_f})^2 + (-\frac{1}{\omega+\omega_f} + \frac{1}{\omega-\omega_f})^2]\right.$$
$$+ (\frac{1}{\omega^2-\omega_f^2})^2\cos(\omega_f+\omega)t$$
$$- [(\frac{1}{\omega^2-\omega_f^2}) + (\frac{1}{\omega-\omega_f})^2]\cos(\omega-\omega_f)$$
$$\left. + [-(\frac{1}{\omega+\omega_f})^2 + \frac{1}{\omega^2-\omega_f^2}]\cos 2\omega_f t\right\} \qquad (28)$$

从相互作用表象再变换至原表象 ,我们有

$$U(t) = e^{i\frac{\hat{H}_0}{\hbar}t}U_I(t) = e^{-i\omega\hat{a}^+\hat{a}}U_I$$
$$= e^{i\omega\hat{a}^+\hat{a}}\exp[A(t)\hat{a}^+ - A^*(t)\hat{a}] \qquad (29)$$

当失谱的情况发生时 ,有$|\omega_f \pm \omega| \to \infty$,此时

$$A(t) = B(t) = h(t) \approx 0 \qquad (30)$$

从而　$U(t) = e^{-i\omega\hat{a}^+\hat{a}}$ $\qquad (31)$

这恰是自由谐振子的演化算子 ,大失谱的外部驱动力对系统不产生有效的影响.

4　结论

在处理多自由度量子体系动力学中常常使用的 Born - Oppenheimer 近似 ,旋转波近似和缓变近似的思想正是基于上述失谱原理. 而上面的讨论正表明了量子问题和经典问题在失谱的情况时形式上是统一的 ,我们可以依据经典图象来理解量子力学问题 ,使得人们可在更加现实的基础上考察量子力学问题.

5　参考文献

1　Zurek W H. Decoherence and the transition from quantum to classical. Physics Today , 1991 ,44(10) :36～44

2　Sun C P. Born - Oppenheimer approximation of quantized cavity - atom system and localization control of atomic tunneling. Science in China (Series A) , 1995 ,38(2) :227～232

3　Louisell W H. Quantum Statistical Properties of Radiation. New York: Jon , Wiley & Sons , 1973

4　刘夏姬 ,孙昌璞. 高阶旋转波近似方法及其对任意强度耦合的多光子 JC 模型的应用. 量子电子学 ,1994 ,11(3)

5　Sun C P. High - order quantum adiabatic approximations and Berry 's phase factor. J Phys. A 1988 ,21 :1595～1599

6　Sun C P. High - order adiabatic approximation related to non - Abelian Berry 's phase factors and nuclear quadrupole resonance. Phys Rev D , 1990 ,41 :1318

7　Sun C P, Xiao Q. Wei - Norman algebraic method solving the evolution of coherent state of electron on two dimensions. Commun Theor Phys , 1991 ,16 :359～363

(下转 10 页)

比较式(45)和(46),可见式(45)更为精确.在低频段出现了一个零点频率和三个极点频率;而在高频段出现了一个零点频率和两个极点频率.其原因是本文分析时较全面地考虑了电路有关参数的影响,只是在某些分析环节上作了一定的近似处理.

4 参考文献

1 童诗白.模拟电子技术基础.第 2 版.北京:高等教育出版社,1988.132～152

2 康华光.电子技术基础(模拟部分).第 3 版.北京:高等教育出版社,1988.281～305

3 彭龙商,邓亚美,姚长安.模拟与数字电路.成都:四川科学技术出版社,1984.205～215

PRECISE ANALYSIS OF FREQUENCY RESPONSE CHARACTERISTICS OF *RC* - COUPLED AMPLIFIER

Luo Fenglin

(Department of Electric Power Engeering, Changsha University of Electric Power, Changsha, Hunan, 410077, China)

Abstract A precise analysis is made for frequency response characteristics of single - stage *RC* - coupled transistor amplifier connected with common emitter by using the mode method and *y* - parameters.

Key words transistor amplifier; gain; frequency response characteristics

---

(上接 3 页)

CLASSICAL AND QUANTUM DETUNING

Wang Cheng Zhang Li Sun Changpu

(Department of Physics, Northeast Normal University, Changchun, 130024, China)

Abstract The detuning problem in the classical and quantum processes is dealt theoretically. One dimensional oscillator is taken as an example for discussing similarity between both theories. The effect of external force could be neglectable when its frequency departs from the intrinsic frequency seriously.

Key words quantum; detuning; harmonic oscillator