大学生园地

稳恒电路分析中的变分原理

长春东北师范大学物理系八〇级　孙昌璞

变分原理告诉我们，满足一定约束条件的物理系统，在其所有的可能状态中，对应于作用量函数取极值的状态是真实存在的状态。而作用量函数一般是和能量相关联的．例如在我们以下所讨论的问题中，作用量函数可简单地取为系统的能量或耗散功率[1]。

下面我们试就稳恒电路分析中的几个例子来说明上述问题。

1．并联电路中的电流分布[2]

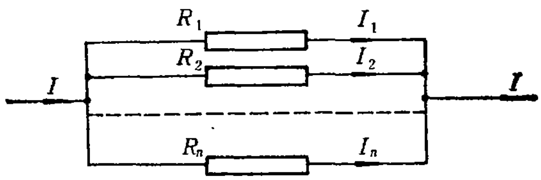

图 1

在如图(1)所示的 n 个电阻组成的并联电路中，可能存在许多种电流分布状态，我们用 $\{I_1, I_2, \cdots I_n.\}$ 表示其中的一个状态；通过 R_1 的电流为 I_1，通过 R_2 的电流为 I_2，$\cdots$．它应满足的约束条件是：

$$\sum_i^n I_i = I. \qquad 1—(1)$$

对应于分布 $\{I_1, I_2, \cdots, I_n.\}$ 的作用量函数取为体系的功率耗散：

$$E=\sum_i^n I_i^2 R_i. \qquad 1—(2)$$

用拉格朗日不定乘子法，可讨论 E 的极值问题：

$$-\lambda \delta I+\delta E=0 \qquad 1—(3)$$

$$\sum_i^n (2R_iI_i-\lambda)\delta I_i=0 \qquad 1—(4)$$

因为 δI_i 是独立的，则有 $2R_iI_i-\lambda=0$。从而得到

$$R_iI_i=\frac{\lambda}{2}=\text{常数 } U\text{（恰是电阻两端电压）}. \qquad 1—(5)$$

这样就得到了功率耗散取极值（可进而确定为极小值）时的电流分布

$$\left\{\frac{U}{R_1}, \frac{U}{R_2}, \cdots, \frac{U}{R_n}\right\}. \qquad 1—(6)$$

地方．如果你使用某一哈密顿算符时这个方程给出错误的结果，这个算符就是错误的哈密顿算符．可不要改变海森伯量子力学的基础．这个基础是很牢固的，是极好的。

我们能够得到更好的哈密顿算符吗？存在着巨大的可能性．因为这个海森伯理论是很强有力的，比经典力学强有力得多．海森伯理论之所以强有力，是因为其中出现的动力学变量具有很一般的性质．人们通常把这些动力学变量看作动力学坐标的函数及其导数。

海森伯本来是用矩阵形式的动力学变量写出这些方程式的．如果容许更一般的量作为动力学变量，就能把动力学变量大大推广．它们可以是任何代数量，但是一般说来，乘法运算不再遵从交换律：u 乘以 v 不等于 v 乘以 u；而乘法运算的结合律却依然成立．还可容许更多的可能性：容许动力学变量完全不必从经典力学提出；容许动力学变量作为构成某些群的元素．近代物理学与引进这样的动力学变量到量子理论中来是有很大关系的。

究竟应该取什么群？有很多群可供选择，并且人们正在研究各种各样的群，以便搞清楚它们有多大用处．还可能是具有更一般性质的动力学变量，这些变量是物理学家还没有想到的某种东西。

好啦，我觉得以上所说的是一条线，物理学家应把他们的注意力集中在这条线上，而不应该用曲解海森伯方程的方法做工作．他们应当参与寻找正确的哈密顿算符的工作，当人们有了一般的非对易的量时，利用其能够产生哈密顿算符的巨大可能性，这种非对易量很可能根本不是从经典力学中提出的，但又不得不引入它，它很可能产生所寻找的正确的哈密顿算符．那将意味着在我们的量子理论的方程中，用基本的方法，产生了某些新种类的自由度．当前有这种趋势：保持从经典力学提出的概念，然后用某些群来补充它们．虽然几乎全世界的物理学家都是这样工作的，但这是一种很狭隘的思想．我觉得它不是充分一般化的基础，而人们必须寻找某一类更一般的哈密顿算符．

若干年前，我的确想出了一种不同的哈密顿算符，是遵循海森伯方程想出来的．这个方程的特点是它的解总是正能量而不像较早的理论中既有负能量解又有正能量解．根据这个新理论，可得出很有趣的方程来．但直到如今，这种新理论还未曾导出任何有实际价值的东西．但我仍旧喜欢提到它，把它当作上述那条线的例子．我们应当按照这条线去探索并取得进展．我已经花费了许多年的时光，希望找出好的哈密顿算符，并把它引进这种理论，但始终没有找到它．我要尽我所能，继续做这件工作，也希望别人沿着这条线前进．总有一天，人们会找出正确的哈密顿算符，因而会有某些新的自由度．它们是我们按照经典概念无法理解的某种东西，而在量子力学基础中起一定的作用．

（本文译自《European Journal of Physics》
vol.5 No.2 1984）

（后勤工程学院）徐善循译

常数U可由 1—(1) 式确定为：$U = I\left(\sum_i^n \frac{1}{R_i}\right)^{-1}$.

这和通常方法得到的结果是一致的. 所以使功率耗散取极值的状态是真实存在的.

2. 电容串联电路中的电压分布

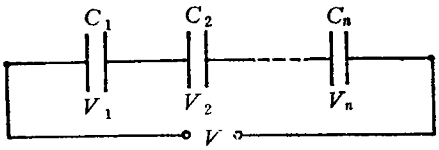

图 2

采用与上面相同的方法可讨论如图(2)所示的电容串联电路中的电压分布问题.

对应于一种电压分布$\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$：

$$\sum_i^n V_i = V \qquad 2—(1)$$

$$E=\sum_i^n \frac{1}{2} C_i V_i^2. \qquad 2—(2)$$

$$-\lambda\delta V+\delta E=0 \qquad 2—(3)$$

$$\sum_i^n (C_iV_i-\lambda)\delta V_i=0 \qquad 2—(4)$$

C_iV_i=常数Q.（恰为电容所带的电量） 2—(5)

由 2—(5)确定的能量取极值时的电压分布状态是真实存在的.

我们还可以讨论电阻串联电路、电容并联电路及其它稳恒电路,结论是相似的,这里不再赘述.

3. 连续分布问题的讨论

以上讨论的都是分立的阻容元件，我们也可以讨论连续的元件，这相当于求解泛函条件极值问题——等周问题[3].

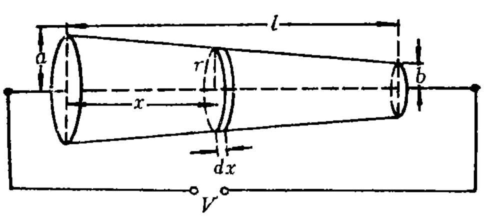

图 3

图(3)是一个由电导率为σ材料制成的圆台形电阻,把它接到电压为V的电源上，现在讨论其电压分布.

为了描述其电压分布,定义电压分布函数$f_V(x)$,其物理意义是：$dV=f_V(x)dx$表示$x\to x+dx$段电阻端电压. 而$x\to x+dx$段的电阻为$dR=\frac{dx}{\sigma\pi r^2}$，这里 $r=a-\frac{a-b}{l}x$, a,b分别为台形电阻两端半径. 则

$$dR=\frac{dx}{\sigma\pi\left(a-\frac{a-b}{l}\right)^2} \qquad 3—(1)$$

由$f_V(x)$的定义知

$$\int_0^l f_V(x)dx=V. \qquad 3—(2)$$

而作为作用量函数的功率耗散是$E=\int\frac{(dV)^2}{dR}$，即

$$E=\int_0^l f_V^2(x)\pi\sigma\left(a-\frac{a-b}{l}x\right)^2dx \qquad 3—(3)$$

由 3—(2)和 3—(3)构成了等周问题. 对应的欧拉方程[3]为

$$\frac{\partial}{\partial f_V}\left[\left(f_V^2(x)\pi\sigma\left(a-\frac{a-b}{l}x\right)^2\right]+\lambda\frac{\partial f_V(x)}{\partial f_V(x)}=0 \qquad 3—(4)$$

$$f_V(x)=\frac{-\lambda}{2\pi\sigma\left(a-\frac{a-b}{l}x\right)^2} \qquad 3—(5)$$

λ可由 3—(2)式确定

$$V=\int_0^l\frac{-\lambda dx}{2\pi\sigma\left(a-\frac{a-b}{l}x\right)^2} \qquad 3—(6)$$

$$-\frac{\lambda}{2\pi\sigma}=\frac{V}{\int_0^l\left(a-\frac{a-b}{l}x\right)^{-2}dx} \qquad 3—(7)$$

$$\lambda=-\frac{2\pi\sigma abV}{l},$$

$$f_V(x)=\frac{ab}{l\left(a-\frac{a-b}{l}x\right)^2}. \qquad 3—(8)$$

分布函数$f_V(x)$的曲线如图(4).

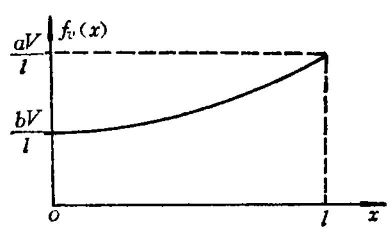

图 4

因为$I(x)=\frac{dV(x)}{dR}=\frac{f_V(x)dV}{dR}=\frac{\pi\sigma abV}{l}$=常数,所以对应于能量取极值的状态,电流是均匀分布的，这恰是电荷守恒定律所要求的. 对于其它的连续分布(如电容的连续分布)也可以作类似的讨论.

从以上的三部分讨论中可以看出，虽然用变分原理处理具体问题在运算上是较繁的，但本文主要想表明它的理论价值及其在物理学中的普适性.

参 考 文 献

[1] H. 戈德斯坦著,汤家镛等译：经典力学，科学出版社. 1981年. P 55.

[2] E. M. 珀塞尔著,南开大学物理系译：伯克利物理学教程,电磁学科学出版社. 1979年. P 429、P 132.

[3] 郭敦仁著,《数学物理方法》,人民教育出版社,P 441.