

# 量子绝热近似理论与 Berry 相因子：推广和应用

孙昌璞, 张鹏

中国科学院理论物理研究所, 北京 100080

## 摘要

本文力图比较全面地介绍量子绝热近似的基本观念和思想的发展, 并详细讨论由此引发的 Berry 几何位相因子等量子力学的重要进展。Berry 几何位相因子的发现是量子动力学演化和整个过程拓扑特性完美结合的典范。本文的内容包含了量子绝热定理、玻恩-奥本海默 (Born-Oppenheimer, BO) 近似的及其诱导规范场和路径积分绝热拓扑作用量等方面的基本内容, 并着重阐述该领域的基本研究方法 - 如高级量子绝热近似和 BO 近似等方法 - 的物理实质。我们还阐述了, 量子绝热近似本质相当于快因子消除, 与传统微扰论, 旋转波近似和二能级近似有密切的联系。本文还简单地介绍量子绝热近似在腔 QED 和冷原子操控问题中的应用, 并讨论了绝热变量分离导致量子纠缠产生的动力学过程, 以及它在量子测量问题中的物理含义。

## 内容

1. 从量子绝热定理到 Berry 几何相因子
  2. 量子绝热近似方法及其推广
  3. Berry 几何位相因子及其拓扑性质
  4. 快因子消除方法及其与量子绝热近似等其它近似方法的关系
  5. 玻恩-奥本海默近似及其诱导规范场和拓扑作用量
  6. 在腔量子电动力学 (腔 QED) 中的应用
  7. 绝热量子纠缠与量子测量问题
  8. 小结
- 附录 A: 量子力学中的微分流形与纤维丛

## §1 引言：从量子绝热定理到 Berry 几何相因子

二十年代末，量子力学的基本构架和核心思想业已形成。以后的发展，主要集中于以下两个方面：一、广泛地应用到不同的物理领域，形成固体量子理论、原子分子物理、核物理、基本粒子物理与量子场论等诸多新兴科学领域，直至导致了半导体和激光等高新技术的发明；二、不停地探索量子物理的理论基础和基本问题（如 EPR 佯谬、薛定谔猫佯谬和 Bell 不等式等），越来越接近微观世界的本质描述，直至今天激发了量子信息等直接应用量子概念的尝试 [1-2]。贯串着这些发展，量子相干性的观念是所有问题的核心所在 [3]，它的具体表现就是形形色色的量子相位因子的效应。量子位相观念的发展是现代物理发展的主旋律之一，这方面最典型的例子就是 Aharonov-Bohm 位相因子 [4] 和 Berry 几何相因子 [5]。特别是后者，在最近的十五年里，已成量子力学发展最重要的方面之一，其基本观念几乎渗透到物理学的各个领域 [6-7]。

Berry 几何相因子的提出与量子绝热过程的研究是密不可分的。大家知道，哈密顿量与时间无关的量子系统若开始处在一个定态（时间无关的哈密顿量的本征态）上，则在以后的演化中，它会始终处在这个定态上。未态与初态的唯一差别，是未态增加了一个只与能量相关的动力学相因子。如果哈密顿量依赖于时间，体系通常不会再保持在初始时刻的本征态上。哈密顿量随时间的改变，会激发不同瞬时能级间的跃迁。然而，与系统内禀演化的相比，如果哈密顿量的改变足够缓慢，或称体系是绝热 (Adiabatic) 变化的，类似于定态演化的特征会得以保持。量子绝热定理对此给出了定量的描述：

设  $H(t)$  是体系随时间改变的哈密顿量。若  $t = 0$  时，体系处在  $H(0)$  的本征函数  $|n(0)\rangle$  上，当  $H(t)$  的变化足够缓慢时在任一时刻  $t$ ，体系仍将处在瞬时哈密顿  $H(t)$  的本征态  $|n(t)\rangle$  上。

量子绝热定理本身并未直接指出在  $t$  时刻系统的状态  $|\Psi(t)\rangle$  是什么，只是说  $|\Psi(t)\rangle \propto |n(t)\rangle$ 。但是，在证明量子绝热定理过程中，人们只给出了仅仅符合人们直觉的推论 [8-10]：

$$|\Psi(t)\rangle \sim |n(t)\rangle = e^{-i \int_0^t E_n(t') dt'} |n(t)\rangle \quad (1.1)$$

其中  $E_n(t)$  是  $H(t)$  在  $t$  时刻的瞬时本征值。这与时间无关系统的定态演化是一

致的：当  $H(t)$  不依赖于时间， $|\Psi(t)\rangle = \exp[-iE_n t] |n\rangle$

然而，在 1984 年，英国 Bristol 大学 Berry 指出 [5]，方程 ( 1.1 ) 所表达的物理不尽正确。在很多情况下，方程 ( 1.1 ) 中除了动力学相因子

$$D(t) = \exp[-i \int_0^t E_n(t') dt'] \quad (1.2)$$

还应有一个附加的相位

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \left\langle n(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} n(t') \right\rangle dt' \quad (1.3)$$

今被称为 Berry 几何相位因子。这时，

$$|\Psi(t)\rangle = \exp[i\gamma_n(t)] e^{-i \int_0^t E(t') dt'} |n(t)\rangle \quad (1.4)$$

事实上，早在 Berry 工作之前，人们已经知道这个相因子的存在，但是人们由于对波函数的单值性尚未有深入的认识而忽略了它的物理效应。一个典型论证，可以席夫的教科书 [8] 中找到。他们认为，即然本征方程

$$H(t) |n(t)\rangle = E(t) |n(t)\rangle \quad (1.5)$$

确定的本征函数可以相差一个位相因子，即

$$|\widetilde{n}(t)\rangle = e^{i\theta_n(t)} |n(t)\rangle \quad (1.6)$$

仍然是方程 ( 1.5 ) 的解 ( 这里， $\theta_n(t)$  形式上是时间的任意函数 )，那么适当地选取  $\theta_n(t)$ ，会使  $\theta_n(t) = \gamma_n(t)$ ， $|\widetilde{n}(t)\rangle$  对应的几何位相  $\widetilde{\gamma}_n(t) = 0$ 。从这个表面上的意义讲，几何相因子是由于本征函数相位选择的不确定性造成，人们完全可以重新选择位相加以消除 [8]。

然而，在许多情况下，我们并不能任意选择本征函数的相位。哈密顿量  $H(t) = H[\lambda(t)]$  通常是通过一组参数  $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)]$  依赖于时间的， $H$  对  $\lambda$  是单值的。因而， $|n(t)\rangle = |n[\lambda(t)]\rangle$  也是参数  $\lambda$  的单值函数，但是位相重新选择会改变本征函数的单值性，这是量子力学所不允许的。事实上，在  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$  张成的参数空间  $M$  中， $\gamma_n(t)$  可重新表达为  $M$  中的路线积分：

$$\gamma_n(t) = i \int_{R(t)} \langle n[\lambda] | \nabla_\lambda n[\lambda] \rangle d\lambda \quad (1.7)$$

其中  $\nabla_R = (\frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial}{\partial \lambda_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \lambda_N})$  是  $M$  中的梯度算子。因此，几何相因子不是  $R$  的单值函数，而是一个依赖于路径的（不可积）相因子。重新选择相因子，本质上改变了波函数的单值性，这就是 Berry 几何相因子的几何起源。总之，在参数空间中，几何位相的不可积性—依赖于路径的  $t \rightarrow R(t)$ ，而不只是路径的末端  $\lambda(t)$ ，是 Berry 几何位相存在的拓扑原因 [11]。

另外，从动力学角度看，没有 Berry 几何相因子，方程 (1.1) 定义时间演化不能很好地满足薛定谔方程。只有补充了 Berry 几何位相因子，薛定谔方程才能被很好地满足，这是 Berry 几何位相因子存在的动力学原因 [12]。仔细考察量子绝热近似成立的条件 [9]

$$\left| \frac{\langle n(t) | \dot{m}(t) \rangle}{E_n(t) - E_m(t)} \right| \ll 1 \quad (1.8)$$

可以说明，动力学原因是不可缺少的，它与几何拓扑起源是相辅相成相的，不可相互替代。后者保证了 Berry 几何位相因子不能通过重新选择本征函数  $|n(t)\rangle$  的相位加以消除，而前者是动力学方程所必需的。

Berry 几何位相因子是 Berry 在研究量子混沌时发现的。当时，Berry 及其合作者正在研究三角形的无穷高势垒中粒子能级交叉点分布问题 [13]，其宏观的类比是三角形台球桌中台球的运动。显然，能级是三角形的两个角的函数，能级简并会随着这两个角度变化而出现。瞬时本征函数沿着两个角度构成的参数空间中一个闭会路径变化，波函数将会伴随着一个附加的几何位相因子—Berry 几何相因子 [13]。这时，虽然整体的量子态是通常变量（如位置）的单值函数，但在参数空间上不一定是一个单值函数。参数空间的拓扑和几何特征，会决定波函数非单值性的基本特征。

Berry 几何相因子显然是在研究特殊问题时发现的，但后来风涌而至工作表明，它是量子理论中一个普遍存在的重要概念，深刻地反映了量子系统乃至经典动力学过程的整体性质。它的研究已涉及到原子分子物理、凝聚态理论、核物理和粒子物理、量子场论等物理领域。显然，此前人们对量子过程整体特征已经有所认识（如表征电磁势物理意义的 Aharonov-Bohm 位相的发现），但 Berry 几何相因子的普适性是令人惊讶的。本文由于篇幅所限，不能一一介绍它的应用，只对其基本观念和关键的应用进行了比较系统地阐述。

1987 年起，作者之一（孙昌璞）有幸参与了这个领域的研究，其工作是从

量子绝热定理的重新证明着手进行的 [14-17]。当时，我们发现，Berry 本人的论述不加重新证明，直接引用了量子绝热定理，但以前证明绝热定理的推论通常是排除 Berry 几何位相的存在。为此，必须改进量子绝热定理的证明，这就要求我们会计算量子绝热定理的高阶的修正。所以，我们提出了高阶量子绝热近似方法。它不仅在零阶近似时，自动给出包含 Berry 相因子的结果 [14-17]，而且在偏离绝热近似条件时会计算高阶小量。后来证明，这种方法实质上是一种“时变表象”中的微扰理论，其核心思想可以用来理解旋转波近似、绝热消除法和二能级近似等近似方法 [18]。这些近似方法，在现代物理有普遍的应用。对于上述量子绝热相关近似方法的系统介绍，也是本文的议题之一。

本文另外的议题是更普遍的量子绝热近似——玻恩 - 奥本海默 (Born-Openheimer) 近似 (BO 近似) [19]。考虑系统的缓变参数不再是一个人为控制的参量， $\lambda(t)$  随时间改变的方式不是事先给定的 [20]，而是一个由相互作用动力学决定的动力学变量  $Q$ 。在绝热的条件下，哈密顿量  $H(Q, x)$  中，快变量  $x$  描述的运动可以与  $Q$  近似地分离。从而，可以给出  $H(Q, x)$  的近似因子化波函数

$$\psi_n(Q, x) = \phi_n(Q)\chi_n(x, Q) \quad (1.9)$$

其中， $\chi_n(x, Q) = \langle x | n[Q] \rangle$  是固定  $Q$  时， $H_1 \equiv H_f(x) + V(x, Q)$  的本征函数，相应的本征值为  $V_n(Q)$ ，而  $\phi_n(Q)$  满足有效本征值方程。当慢变部分的自由哈密顿量为  $H_s(Q) = \frac{P^2}{2M} + V_s(Q)$  时这个有效方程是 [21-23]

$$\left[-\frac{1}{2M}(\nabla_Q - iA(Q))^2 + V_s(Q) + V_n(Q)\right]\phi_n(Q) = E\phi_n(Q) \quad (1.10)$$

其中

$$A(Q) = i\langle n[Q] | \nabla_R n[Q] \rangle \quad (1.11)$$

是所谓的诱导规范势 [21 - 23]。Berry 几何相因子是它在参数空间中路线积分 - 诱导规范势的 AB 相位，即

$$\int A(Q)dQ \quad (1.12)$$

要指出的是，传统的 BO 近似中是不出现诱导规范势的。在 Berry 几何相因子尚未发现以前，C. A. Mead 等在研究分子构形时 [24-26] 就意识到这个位相的存在及其对传统 BO 近似修正的物理意义。Berry 相因子发现不仅重新唤

起人们对这个问题研究，而且导致诱导规范场概念的提出、深化 [27-29] 和实验验证 [30-31]。特别是与量子场论反常问题联系 [32-33]，诱导规范场的观念代表了一种有效的拓扑作用量 [34-35]。

以上概述了本文涉及的主要内容。由于十五年来，这方面的研究分支众多，应用领域广泛，本文勉为其力，无法加以全面介绍。许多教课书和专著对 Berry 几何位相有不少涉猎，本文不拟重复，而只是从思想方法和近期应用的角度，围绕着这个重要概念，介绍量子绝热近似理论的物理实质及其推广和应用，并特别强调在量子测量理论和量子信息方面的应用。

## §2 量子绝热近似方法及其推广

绝热近似和绝热不变量的观念来自于经典力学轨道变形的研究，它对量子论的发展是至关重要的。在玻尔原子模型的索末菲量子化条件下，原子核的缓慢变化，只是改变电子轨道的形状而不激发不同轨道间的跃迁，从而使得量子化条件保持 [36]。量子力学建立之后，1928年，玻恩和 Fock 随即把旧量子论的绝热定理在量子力学框架中重新表达 [37]。1950年，Kato 给出了这个定理的“严格”证明 [38]。1984年 Berry 几何相的发现是量子绝热近似理论发展的里程碑。

### §2.1 量子绝热近似与 Berry 相位

为了理解方便，以下介绍量子绝热定理，我们不拟采用文献 [38] 中的形式严谨的数学证明，而是在尽可能严格前提下，着重阐述其本质内容和证明过程的物理考虑。设  $H(t) = H[\lambda(t)]$  是含时量子体系的哈密顿量，它通过一组参数  $\lambda = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)]$  依赖于时间  $t$ ，在一般情况下，由于时间相关性，其演化过程无法用解析的显式描述。但是，如果  $H(t)$  的变化是缓慢的，我们可以在时变绘景中近似地解析求解。时变绘景是采用  $H(t)$  的瞬时本征态  $|n(t)\rangle = |n[\lambda(t)]\rangle$  来描述体系的波函数  $|\psi(t)\rangle$ 。为了方便，先假设在任何时刻  $|n(t)\rangle$  是非简并的，并对应于瞬时本征值  $E_n(t) = E_n[\lambda(t)]$ 。设

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) e^{-i \int_0^t E_n(t') dt'} |n(t)\rangle \quad (2.1)$$

满足薛定谔方程，则待定系数  $C_n(t)$  满足线性方程组

$$\dot{C}_n(t) + \langle n(t) | \dot{n}(t) \rangle C_n(t) = - \sum_{m \neq n} e^{i\Omega_{mn}(t)} \langle n(t) | \dot{m}(t) \rangle C_m(t) \quad (2.2)$$

其中

$$| \dot{n}(t) \rangle \equiv \frac{\partial}{\partial t} | n(t) \rangle \Omega_{mn}(t) = \int_0^t (E_n(t') - E_m(t')) dt'$$

为了分析哈密量缓变条件的作用，我们考察 ( 2.2 ) 的积分形式

$$\begin{aligned} & C_n(t) - C_n(0) + \int_0^t \langle n(t') | \dot{n}(t') \rangle C_n(t') \\ &= - \sum_{m \neq n} \int_0^t e^{i\Omega_{mn}(t')} \langle n(t') | \dot{m}(t') \rangle C_m(t') dt' \\ &= - \sum_{m \neq n} I_{mn}(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

其右端  $I_{mn}$  可表达为一个求和

$$I_{mn}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i e^{i\Omega_{mn}(t)}}{\dot{\Omega}_{mn}(t)} \left[ \frac{\hat{P}_{mn}(t')}{-\dot{\Omega}_{mn}(t')} \right]^k \langle n | \dot{m} \rangle C_m(t') \Big|_0^t \quad (2.4)$$

其中

$$\hat{P}_{mn}(t') = \left[ \frac{i \ddot{\Omega}_{mn}(t')}{\Omega_{mn}(t')} - i \frac{d}{dt'} \right].$$

这里利用了分部积分公式

$$\int_0^t f(t') e^{-i\theta(t')} dt' = \frac{i e^{-i\theta(t')}}{\dot{\theta}(t')} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{i \ddot{\theta}(t')}{\dot{\theta}^2(t')} - \frac{i}{\dot{\theta}(t')} \frac{d}{dt'} \right]^k f(t') \Big|_0^t \quad (2.5)$$

很明显，如果由时变哈密顿量  $H(t)$  引起的变化  $\langle n | \dot{m} \rangle C_m(t)$  是一个缓变函数，而  $e^{i\Omega_{mn}(t)}$  是一个振荡很快的函数，方程 ( 2.2 ) 右边的贡献必定趋近于零。上式给出了这个近似成立的定量条件—量子绝热近似条件

$$\left| \frac{\langle n | \dot{m} \rangle}{E_n(t) - E_m(t)} \right| \ll 1 \quad (2.6)$$

这时，有绝热近似解

$$C_m(t) = e^{i\gamma_m(t)} C_m(0) \quad (2.7)$$

其中  $\gamma_n(t)$  就是 ( 1.3 ) 定义的 Berry 相因子。由此我们证明了量子绝热定理，在初始时刻，体系处在  $|n(0)\rangle$  态上， $C_m(0) = \delta_{mn}$ 。在绝热近似条件下，我们得到绝热近似波函数。

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\gamma_n(t)} e^{-i \int_0^t E_n(t') dt'} |n(t)\rangle \quad (2.8)$$

其中自然包含了 Berry 几何相因子。

量子绝热定理的命名不仅有其历史原因（在旧量子论中起过重大作用的绝热定理），而且有着重要的物理原因 [10]。实质上，在统计力学中，如果把微观状态视为单粒子的能级，体系的熵  $S$  取决于粒子在不同能级上布居数  $W_n$ ，即

$$S = -K \sum_n W_n \ln W_n \quad (2.9)$$

显然，当体系的参量（如容器体积）缓慢变化不激发粒子的跃迁，诸粒子会以相同的布居保留在变化后的能级上，这个过程保证了体系熵不变。因此，在统计热力学的意义上，这的确是一个绝热过程。事实上，从宏观热力学的角度看，当人们足够缓慢地拉动如图 1 所示的活塞，从而改变容器中气体的体积时，气体会始终保持在热力学平衡的状态上。其微观图象可解释为无限深势阱的壁被绝热地拉动，原来在第  $n$  能级上粒子，仍保持在第  $n$  个能级上，从而导致热力学的绝热过程。为了理解绝热条件的定量含义，我们看到

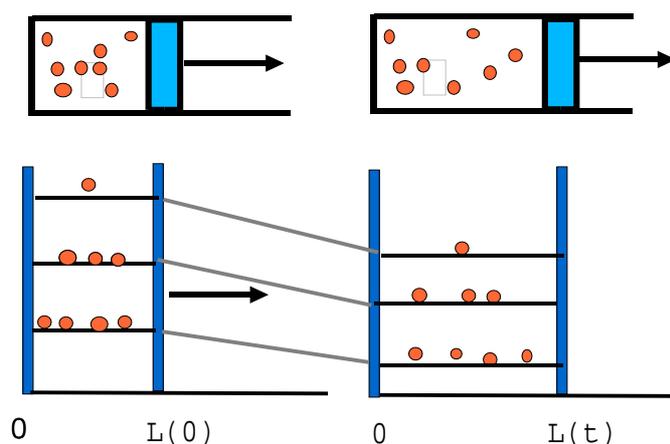


图 1: 与统计热力学意义上的绝热过程类比

$$\langle n | \dot{m} \rangle = \frac{\langle n | \frac{\partial}{\partial t} H(t) | m \rangle}{(E_m - E_n)} \quad (2.10)$$

代表哈密顿量引起的变化，而且瞬时的能级差  $E_m(t) - E_n(t)$  代表了量子系统内部的各种跃迁过程的特征频率。量子绝热条件意味着系统内部变化的快慢远远大于外部变化的“速率”。也就是说，体系参数改变“速率”远远小于系统的内禀特征时间，量子体系将永远保留在它原来的“轨道”上，而不发生跃迁。直观地看来，只要  $\lambda(t)$  变化足够地慢，就能保证绝热近似成立，但事实并非如此， $\lambda(t)$  慢变只是绝热近成立的必要条件，而不是充分条件。

考虑如图 2 的例子：一个自旋为  $1/2$  的粒子在如图 2 所示的磁场中运动，磁场是由沿  $X$  轴固定磁场  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$  和缓变的旋转磁场  $\vec{B}_1(t)$  叠加而成， $\vec{B}_1(t)$  的大小与  $\vec{B}_0$  的大小相同。这时，体系的两个瞬时能级为  $E_{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \mu |\vec{B}(t)|$ ，其中  $\mu$  是磁场与  $1/2$  自旋的耦合因子， $\vec{B}(t) = \vec{B}_1(t) + \vec{B}_0$  是总的磁场。显然，不管旋转磁场变化得多么慢，总有一个时刻  $|\vec{B}(t)| = 0$ ，这时出现能级交叉，绝热近似条件中的分母为零，绝热条件不再成立，粒子会发生能级反转。这个例子表明，一般我们不能仅凭直觉就断言绝热条件成立。

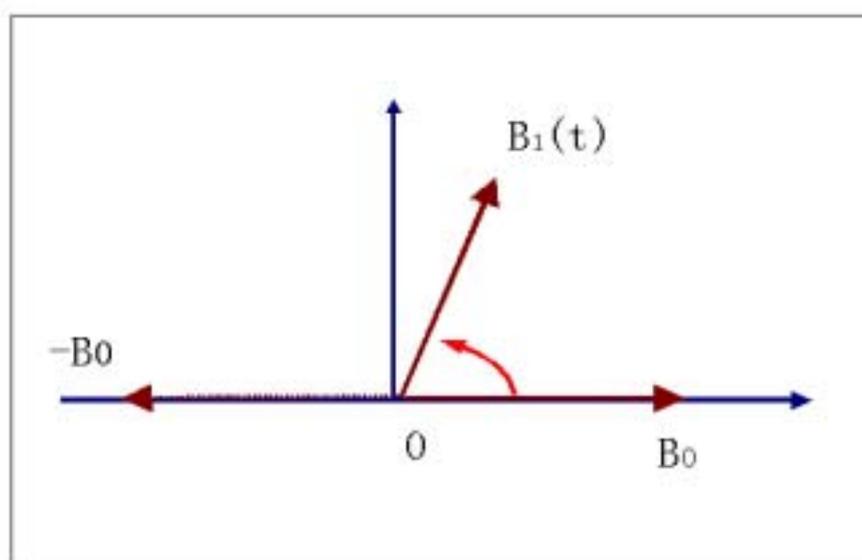


图 2: 自旋  $1/2$  的粒子所在的运动磁场

## §2.2 高阶量子绝热近似方法

以下将讨论偏离绝热条件时, 怎样去修正绝热近似的结果。注意到分部部分  $I_{mn}(t)$  是各种反比于  $\dot{\Omega}_{mn}(t)$  的幂次项求和, 我们可以把它微分的形式地记为

$$\dot{I}_{mn}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} (\varepsilon^k \hat{Q}_{mn}^{(k)} C_m) \quad (2.11)$$

其中  $\hat{Q}_{mn}^{(k)} = \frac{ie^{i\Omega_{mn}(t)}}{\Omega_{mn}(t)} \left[ \frac{\hat{P}_{mn}(t)}{-\Omega_{mn}(t)} \right]^k \langle n(t) | \dot{m}(t) \rangle$ ,  $\varepsilon$  是引入微扰标记参量, 计算结束后, 令其为 1。相应地, 形式地写下

$$C_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k C_n^{(k)}(t) \quad (2.12)$$

把 (2.11) 和 (2.12) 代入 (2.3) 微分后的表达式

$$\dot{C}_n(t) + \langle n | \dot{n} \rangle C_n(t) = \sum_{m \neq n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} (\varepsilon^k \hat{Q}_{mn}^{(k)} C_m) \quad (2.13)$$

中, 比较  $\varepsilon^k$  的同次幂项, 我们可得到一个可以递推求解的方程组

$$\dot{C}_n^{(0)}(t) + \langle n | \dot{n} \rangle C_n^{(0)}(t) = 0 \quad (2.14)$$

$$\dot{C}_n^{(1)}(t) + \langle n | \dot{n} \rangle C_n^{(1)}(t) = \sum_{m \neq n} \frac{d}{dt} [\hat{Q}_{mn}^{(1)} C_m^{(0)}(t)] \quad (2.15)$$

$$\dot{C}_n^{(l)}(t) + \langle n | \dot{n} \rangle C_n^{(l)}(t) = \sum_{m \neq n} \sum_{k=1}^l \frac{d}{dt} [\hat{Q}_{mn}^{(k)} C_m^{(l-k)}] \quad (2.16)$$

由于在方程 (2.16) 的右端, 仅包含  $C_m^{(l-1)}, C_m^{(l-2)}, \dots, C_m^{(0)}$ , 方程组可以从  $C_m^{(0)}$  出发逐级求解。例如从初态  $|\psi(0)\rangle = |\bar{n}(0)\rangle$  可以得到

$$C_n^{(0)} = \delta_{n\bar{n}} e^{i\gamma_n(t)}$$

$$C_n^{(1)} = e^{i\gamma_n(t)} \int_0^t (\hat{Q}_{\bar{n}n}^{(1)} e^{i\gamma_{\bar{n}}(t')} e^{-i\gamma_n(t')} dt')$$

以上讨论表明, 基于对量子绝热近似条件的深入理解, 我们能够通过系统的迭代递推方法, 对偏离绝热条件的量子动力学过程进行非绝热修正。这种方法我们称之为高阶量子绝热近似方法 (HOAAM)。Dubvik 等在长篇评述 [39] 中, 把我们的上述方法称为后绝热近似 (Post-adiabatic approximation) 第四节将证明, 这种方法在特定的绘景下等价于某种微扰展开, 其中心思想是分部积分公式 (2.5), 它本质上描述了一个快速振荡因子的积分效应, 会大大压低基本物理过程贡献。只有共振项才会有效地贡献于实际物理过程。

### §3 Berry 相因子的几何拓扑特征及其非阿贝尔推广

早在 1938 年，人们就在光学实验中意识到几何相因子的存在。其后这个观念一再被涉及，但其深刻的物理意义只是到了 Berry 工作发表后才得以基本澄清。Simon 的工作 [40] 首先指出 Berry 相因子具有几何、拓扑特征，它代表厄米线丛上的和乐 (holonomy)，而绝热演化自动地定义了这个纤维丛上的联络。从这个意义上讲，Berry 相因子与规范场结构有着密切的联系。

#### §3.1 厄米线丛结构与阿贝尔诱导规范场

实质上，如图 3，我们可以把参数空间  $M : \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)\}$  想象成一个底流形，本征函数  $|n[\lambda]\rangle$  可以视为  $M$  上线丛： $\{(\lambda, |n\rangle) \mid H[\lambda]|n[\lambda]\rangle = E_n[\lambda]|n[\lambda]\rangle\}$  的截面（通常称为波截面）。

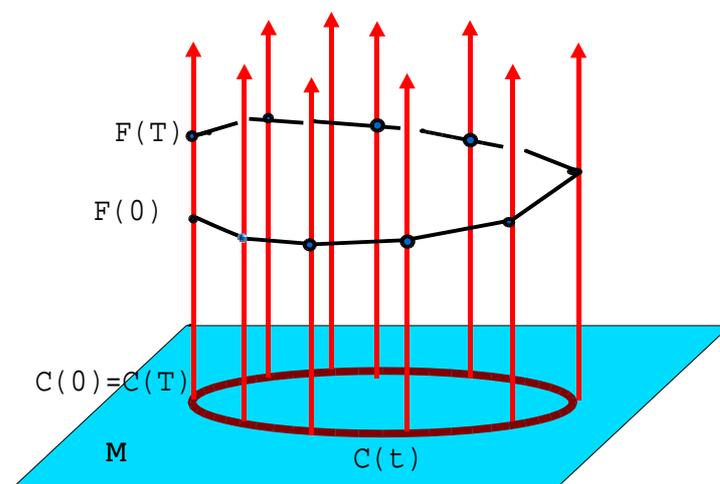


图 3: Berry 相因子的纤维丛结构

事实上，本征方程确定的归一化本征态可以相差一个相因子。取不同相因子，可以得到  $M$  的一根纤维  $\{e^{i\theta}|n\rangle \mid \theta \in R\}$ 。现在考虑  $M$  上一个闭区线  $C(t) : \{t \rightarrow \lambda(t) \mid \lambda(T) = \lambda(0)\}$  的水平提升。通过特定的联络，水平提升后的曲线

$F(t)$  不再是一个闭曲线，其首端  $F(0)$  和末端  $F(T)$  可以差一个相因子或  $U(1)$  变换。这些变换形组成了  $U(1)$  和乐群。现在问题是，在量子演化过程中什么是决定水平提升的联络，或 Berry 相因子在什么条件下构成厄米线丛的和乐群？

Simon 十分明确地指出，量子绝热演化正好自然地定义出这样的联络：

根据附录 A，在一个厄米丛上，定义水平提升的自然联络可以由

$$\text{Im}(\langle \psi | d\psi \rangle) = 0 \quad (3.1)$$

决定。现在证明在量子绝热演化的确能够满足方程 (3.1)。事实上，在绝热条件下，初态为  $|n[\lambda(0)]\rangle$  的系统将始终保持在这个准能级上。不失一般性，为了扣除动力学相因子影响，取  $E_n(t) = 0$ 。这时，波函数

$$|\psi[\lambda]\rangle = W(\lambda) |n[\lambda]\rangle \quad (3.2)$$

的变化，由因子  $W(\lambda)$  决定。波函数的变化可分为垂直部分

$$|\sigma_V\rangle = \sum_{m \neq n} W(\lambda) \langle m | dn \rangle |m[\lambda]\rangle \quad (3.3)$$

和水平部分

$$|\sigma_H\rangle = [dW(\lambda) + \langle n | dn \rangle] |n[\lambda]\rangle \quad (3.4)$$

很明显平行移动意味着  $\langle n[\lambda] | \sigma_V \rangle = 0$ 。从而给出， $W(\lambda)$  就是 Berry 几何位相因子

$$W[\lambda] = \exp[i\gamma_n[\lambda]] \quad (3.5)$$

它是厄米线丛上和乐群元素。

以下通过具体例子来考察这个和乐群的几何拓扑特征。在缓变磁场  $\vec{B}(t) = (B_x, B_y, B_z) = B(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  中，有一个由 Pauli 矩阵  $\vec{\sigma}$  描述的自旋为  $1/2$  的粒子。 $f = f(t)$ , ( $f = B, \theta, \varphi$ ) 是时间相关的、周期为  $T$  的函数。从严格意义上讲，无法整体地使用球坐标，但为了阐述方便，我们假设不考虑  $\theta = 0, \pi$  的极点，以避免此点  $\phi$  无定义。在附录中，我们从微分流形的观点说明坐标选取对问题的影响。这时，系统的哈密顿量

$$\begin{aligned} H &= \mu \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \\ &= \mu B(t) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

具有瞬时本征函数

$$|\phi_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$|\phi_-\rangle = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

它们分别相应本征值  $E_{\pm}[B] = \pm\mu B[t]$ 。对应于  $|\phi_{\pm}\rangle$  有 Berry 几何相因子

$$\gamma_+ = -\int_0^T \dot{\phi} \cos^2 \frac{\theta}{2} dt, \quad \gamma_- = \int_0^T \dot{\phi} \sin^2 \frac{\theta}{2} dt \quad (3.9)$$

如果  $B[t]$  沿  $M$  上的一个闭合回路  $C$  变化,  $C$  张成了  $M$  空间中的立体角为  $\Omega_C$ , 则

$$\gamma_+ = -\frac{1}{2} \oint_C (1 + \cos \theta) d\phi \quad \gamma_- = \frac{1}{2} \oint_C (1 - \cos \theta) d\phi \quad (3.10)$$

相应的 Berry 几何相因子

$$F_{\pm} = e^{i\gamma_{\pm}(C)} = \exp[\mp \frac{i}{2} \Omega_C] \quad (3.11)$$

由闭合轨道的立体角决定。由此看到, 只要参数空间的闭合轨道  $C$  张成的立体角大小一样, 不管轨道形状如何, 不管沿着  $C$  的变化方式如何, 这个几何位相都是一样的, 这是一种典型的拓扑特征 (见图 4)。

Berry 相位的几何拓扑特征还表现在它具有规范不变性。为此, 我们形式地引入  $U(1)$  诱导规范势  $\vec{A}_n$  :

$$\vec{A}_n = \langle n[\lambda] | \nabla_{\lambda} n[\lambda] \rangle \quad (3.12)$$

由此, Berry 相因子可表达为

$$F(\lambda_0, \lambda_f) = \exp\left[\int_{\lambda_0}^{\lambda_f} A_n(\lambda) d\lambda\right] \quad (3.13)$$

其中  $\lambda_0$  和  $\lambda_f$  分别是参数轨道的始点和末点。本征方程允许  $|n[\lambda]\rangle$  差一个定域的  $U(1)$  变换

$$|n[\lambda]\rangle \rightarrow |n[\lambda]\rangle' = e^{i\theta[\lambda]} |n[\lambda]\rangle \quad (3.14)$$

相应地, 诱导规范势  $\vec{A}_n$  将经历一个规范变换

$$\vec{A}_n \rightarrow \vec{A}'_n = A_n + i\nabla\theta[\lambda] \quad (3.15)$$

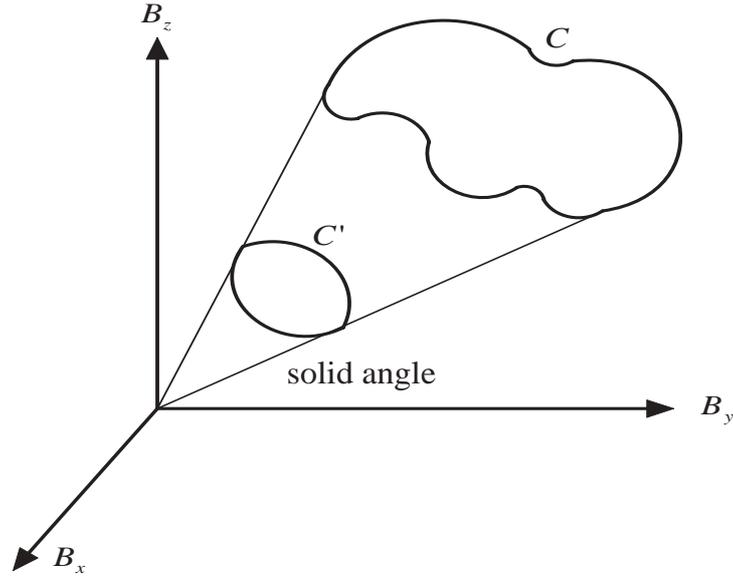


图 4: Berry 相因子的拓扑特征

从而, Berry 相因子  $F(\lambda_0, \lambda_f)$  变为

$$F'(\lambda_0, \lambda_f) = F(\lambda_0, \lambda_f) e^{-i[\theta(\lambda_f) - \theta(\lambda_0)]} \quad (3.16)$$

当  $C$  是一个闭会轨道, Berry 相因子是一个规范不变量, 这与通常电磁场 ( $U(1)$  规范场) 的特征非常相似

以下指出, 对于具有奇异性的参数空间, 诱导规范场会具有磁单极的基本特征。在一般的非均匀磁场  $\mathbf{B} = (B_1(x), B_2(x), B_3(x))$  中,  $H = \mathbf{B}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}$  本征函数  $|\mu_{\pm}[\mathbf{B}]\rangle$  定义了诱导规范势。如

$$\mathcal{A}_+(X)_{\mu} = \mathbf{a}(X) \cdot \frac{\partial}{\partial X_{\mu}} \mathbf{B}(X) \quad (3.17)$$

在参数空间  $\mathbf{B}$  上的诱导磁单极势  $\mathbf{a}$  :

$$a_1 = i \langle u_+[B] | \frac{\partial}{\partial B_1} u_+[B] \rangle = \frac{-(B_3 + |B|) \cdot B_2}{2|B|(B_1^2 + B_2^2)} \quad (3.18)$$

$$a_2 = i \langle u_+[B] | \frac{\partial}{\partial B_2} u_+[B] \rangle = \frac{(B_3 + |B|) \cdot B_1}{2|B|(B_1^2 + B_2^2)}, a_3 = 0. \quad (3.19)$$

给出, 它对应的场强是

$$\mathbf{f} = \nabla_{\mathbf{B}} \times \mathbf{a} = -\mathbf{B}/(2|B|)^3 \quad (3.20)$$

这恰是位于  $\mathbf{B}=0$  处的 "磁单极" 产生的磁场强。

### §3.2 简并情况量子绝热演化

我们可以把上述量子绝热演化问题的讨论推广到简并的情况。就诱导规范场而言，这相当于讨论非阿贝尔的规范理论。但需要指出，诱导规范场显然具有规范场的几何特征，但不具备通常规范场的动力学，即没有动力学的诱导规范场方程。

首先，在简并情况，上面关于高阶量子绝热近似的讨论可以推广到非阿贝尔情况。为此，我们先讨论简并情况的量子绝热定理 [15-16]。

设体系依赖于参数  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$  的哈密顿量  $H[\lambda]$  有简并的本征函数  $|n, \alpha\rangle \equiv |n, \alpha[\lambda]\rangle$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, d_n$ )。对应于本征值  $E_n = E_n[\lambda]$ ，简并度为  $d_n$ 。我们假设体系的对称性不随  $\lambda$  改变而改变，则体系的简并度是不变。这个假设将参数变化导致偶然简并从而引起能级交叉的情况排除在我们讨论范围之外。这时，我们设

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n \sum_{\alpha=1}^{d_n} C_{n\alpha}(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\lambda') dt'} |n\alpha[\lambda]\rangle \quad (3.21)$$

是薛定谔方程的解，则待定系数  $C_{n\alpha}(t)$  满足微分方程组

$$\dot{C}_n(t) + \tilde{A}(n, n) C_n(t) = - \sum_{n \neq n'} e^{i\alpha_{nn'}(t)} \tilde{A}(n, n') C_{n'}(t) \quad (3.22)$$

其中

$$\alpha_{nn'}(t) = \int_0^t \frac{1}{\hbar} (E_n(t') - E_{n'}(t')) dt'$$

这里， $C_n(t)$  是一个列矩阵

$$C_n(t) = \begin{pmatrix} C_{n1}(t) \\ C_{n2}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{nd_n}(t) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

而  $\tilde{A}(n, n')$  是由下式定义的  $d_n \times d_{n'}$  矩阵

$$\tilde{A}(n, n') = \begin{pmatrix} \langle n, 1 | \frac{d}{dt} | n', 1 \rangle, & \langle n, 1 | \frac{d}{dt} | n', 2 \rangle, & \dots, & \langle n, 1 | \frac{d}{dt} | n', d_{n'} \rangle, \\ \langle n, 2 | \frac{d}{dt} | n', 1 \rangle, & \langle n, 2 | \frac{d}{dt} | n', 2 \rangle, & \dots, & \langle n, 2 | \frac{d}{dt} | n', d_{n'} \rangle, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle n, d_n | \frac{d}{dt} | n', 1 \rangle, & \langle n, d_n | \frac{d}{dt} | n', 2 \rangle, & \dots, & \langle n, d_n | \frac{d}{dt} | n', d_{n'} \rangle, \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

采用与简并情况量子绝热近似方程一样的论证, 在绝热条件

$$\left| \frac{\langle n, \alpha | \frac{d}{dt} | n', \alpha' \rangle}{E_n - E_{n'}} \right| \ll 1 \quad (n \neq n') \quad (3.25)$$

下, 绝热近似后的方程是

$$\dot{C}_n(t) + \tilde{A}(n, n)C_n(t) = 0 \quad (3.26)$$

它的形式解

$$C_n(t) = K(t)C_n(0) \quad (3.27)$$

定义了 Berry 相因子的非阿贝尔推广 [41]

$$K(t) = T \exp\left[-\int_0^t \tilde{A}(n, n, \tau) d\tau\right] \quad (3.28)$$

明显地计算出这个非阿贝尔几何相因子是困难的, 但我们可以证明  $K(t)$  具有明显的几何拓扑特征以及诱导规范场结构。

### §3.3 非阿贝尔诱导规范场

用纤维丛的语言说, 被缓变量  $\lambda$  参数化的  $d_n$  维简并子空间  $V_{n\lambda} : \{|n, \alpha\rangle | \alpha = 1, 2, \dots, d_n\}$  可视为底流形  $M : \{\lambda\}$  上过  $\lambda$  点的纤维。当底流形  $M$  上参数的变化形成一个闭合路径时, 波函数的绝热演化定义了纤维丛上的水平提升。这时, 端点和末点的水平提升相差一个么正变换  $K(t) |c\rangle$ , 这是非阿贝尔和乐群  $U(d_n)$  的一个元素。这种水平提升也可以由以下的自然联络得到

$$I_m \langle \psi | \frac{d}{dt} \psi \rangle = 0 \quad (3.29)$$

$$|\psi\rangle = K(t) |n, \alpha\rangle \quad (3.30)$$

对于这样一个联络，可以考虑它的诱导规范结构。定义非阿贝尔的诱导规范势  $A_n(\lambda)$  它是一个  $d_n \times d_n$  的矩阵，其元素如下

$$(A_n)_{\alpha\beta} = \langle n, \alpha | \nabla_\lambda | n, \beta \rangle \quad (3.31)$$

其中  $\nabla_\lambda = (\frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial}{\partial \lambda_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \lambda_n})$  是  $N$  维梯度算符。相应地，可以定义非阿贝尔诱导规范场

$$(F_n)_{ij} = \partial_{\lambda_i}(A_n)_j - \partial_{\lambda_j}(A_n)_i + [(A_n)_i, (A_n)_j] \quad (3.32)$$

由于本征方程

$$H |n, \alpha(\lambda)\rangle = E_n |n, \alpha(\lambda)\rangle \quad (3.33)$$

是简并的，它确定的本征态可以差一个非阿贝尔的幺正变换。因此，基矢经历一个幺正变换  $U$  时

$$|n, \alpha\rangle \longrightarrow |n, \alpha'\rangle = \sum U_{\beta\alpha} |n, \beta\rangle \quad (3.34)$$

$A_n$  经历一个典型的规范变换

$$A_n \rightarrow A'_n = U^+ A_n U + U^+ \nabla_\lambda U \quad (3.35)$$

相应地，规范场强恰好经历一个幺正变换

$$F_n \longrightarrow F'_n = U^+(\lambda) F U(\lambda_0) \quad (3.36)$$

特别是，可以所定义一个 Willson 圈

$$W_c = Tr(K_c) \quad (3.37)$$

其中  $K_c$  是定义在一个环路上的非阿贝尔几何相因子，在规范变换下

$$K(t) \rightarrow U^+(\lambda) K(\lambda) U(\lambda_0) \quad (3.38)$$

对于一个环路  $C$  而言， $W_c$  是规范不变的。

Zee 和 Willcek 首先指出了这种非阿贝尔诱导规范结构的存在 [41]，而 Tycko 核磁共振验证了非阿贝尔 Berry 相因子的存在 [42]。这个实验模型是 Berry 相因子研究中明显给出的非平凡非阿贝尔 Berry 相因子的唯一例子。考虑核磁共振的有效哈密顿量 [43-44](以下我们令  $\hbar = 1$ )

$$\widehat{H}(t) = \widehat{H}[n] = \omega(\vec{n} \cdot \vec{J})^2 \quad (3.39)$$

其中单位矢量

$$n = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha) \quad (3.40)$$

是四极核的主轴。利用角动量理论，我们可以得  $\widehat{H}$  的瞬时本征函数

$$|J, \pm M(\alpha, \beta)\rangle = |J, \pm M(\alpha, \beta)\rangle = e^{-iJ_z \beta} \cdot e^{-iJ_y \alpha} |J, \pm M\rangle \quad (3.41)$$

其中  $|J, \pm M\rangle$  是标准的角动量基， $M = \pm J, \pm(J-1), \dots, \pm \frac{1}{2}$  相应的本征值  $E_M = \omega M^2$

很明显，这个模型存在二度简并，即  $|J, \pm M\rangle$  对应于相同的能量  $E_M$ 。因此这个体系具有  $SU(2)$  诱导规范结构。但是，对于  $M \neq \frac{1}{2}$ ，诱导规范势  $A_M$  是对角的，Wilczek 称这种情况为阿贝尔化 (Abelization)。仅当  $J = \frac{1}{2}$  时，我们才能非平凡地得到非阿贝尔诱导规范场。直接计算可以给出诱导规范势：

$$A(M \neq \frac{1}{2}) = -iM \cos \alpha \cdot \sigma_z d\beta \quad (3.42)$$

$$A(M = \frac{1}{2}) = -\frac{i}{2} \{ [\cos \alpha \cdot \sigma_z - (J + \frac{1}{2}) \sin \alpha \cdot \sigma_x] d\beta + (J + \frac{1}{2}) \sigma_y \cdot d\alpha \} \quad (3.43)$$

对于任意的  $\alpha = \alpha(t)$ ，我们很难计算出非阿贝尔情况的 Berry 相因子，但对于  $\alpha = \text{常数}$ ，我们有解析的结果 [16]

$$\begin{aligned} K_{\frac{1}{2}}(S) &= T \exp[-\int_0^t A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) d\tau] \\ &= \frac{i}{\lambda} \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \Gamma - i\lambda \cos \Gamma, & -(J + \frac{1}{2}) \sin \alpha \sin \Gamma \\ -(J + \frac{1}{2}) \sin \alpha \sin \Gamma, & -\cos \alpha \sin \Gamma - i\lambda \cos \Gamma \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda &= [1 + (J + \frac{3}{2}) (J - \frac{1}{2}) \sin^2 \alpha]^{\frac{1}{2}} \\ \Gamma &= \frac{1}{2} \lambda [\beta(t) - \beta(0)] \end{aligned} \quad (3.45)$$

## §4 量子绝热近似方法与其它近似方法的联系 [18]

由第二节的讨论可以看出，量子绝热近似方法的本质是一种快变量消除法。在一个适当选择的绘景中，体系的运动方程的可分为快变部分和慢变部分，快变部分的积分贡献是可以忽略不计的，这本质上是也一种共振近似理论。它的数学本质是十分简单的，即若  $f(t)$  是一个缓变函数，则

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) e^{i\omega t} dt \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

更一般地, 利用分部积分可证明

$$I(t) = \int_0^T e^{-i\Gamma(t)} f(t) dt = \frac{ie^{-i\Gamma(t)}}{\Omega(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\hat{Q}}{\Omega(t)}\right)^k f(t) \Big|_0^T \quad (4.2)$$

其中

$$\Omega(t) = \dot{\Gamma}(t), \hat{Q} = -i\left(-\frac{\dot{\Omega}(t)}{\Omega(t)} + \frac{d}{dt}\right)$$

当  $\Omega(t) \rightarrow \infty$  时, 这个积分是零。

#### §4.1 快变量消除近似的一般讨论

从物理上讲, 当一个频率很高的外部扰动作用于一个缓慢运动的系统, 高频扰动的平均作用是可以略去的。基于这个想法, 可提出一种新的近似方法—快变量消除近似。量子绝热近似, 普通的含时微扰论, 旋转波近似和二级阶近似均可由这种方法加以概括。

设量子体系的有效哈密顿量  $\hat{H} = \hat{H}_0(t) + \hat{H}_f(t)$  可分为慢变部分  $\hat{H}_0(t)$  和快变部分  $\hat{H}_f(t)$

$$\hat{H}_f(t) = V(t)e^{-i\Gamma(t)} + H.C \quad (4.3)$$

其中  $V(t)$  是缓变函数, 但  $\dot{\Gamma}(t)$  很大。利用积分公式 (4.3), 可以把含时薛定谔方程的积分形式

$$i\hbar(|\psi(t)\rangle - |\psi(0)\rangle) = \int_0^T H_0(t) |\psi(t)\rangle dt + \int_0^T H_f(t) |\psi(t)\rangle dt \quad (4.4)$$

的右端第二项化为  $\frac{1}{\Omega(t)}$  各种幂次项的级数。然后考虑其微分形式

$$i\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_0(t) |\psi(t)\rangle + \frac{d}{dt} \left[ \frac{e^{-i\Gamma(t)}}{\Omega(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \left(\frac{\hat{Q}}{\Omega(t)}\right)^k V(t) |\psi(t)\rangle + H.C \right] \quad (4.5)$$

其中  $\varepsilon$  是引入的微扰参数, 令

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k |\psi^{[k]}(t)\rangle \quad (4.6)$$

代入 (4.5) 并比较方程两边  $\varepsilon$  的相同幂次项, 立即得到可逐级求解的方程组

$$i\frac{\partial}{\partial t} |\psi^{[0]}(t)\rangle = \hat{H}_0(t) |\psi^{[0]}(t)\rangle \quad (4.7)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} |\psi^{[1]}(t)\rangle = \hat{H}_0(t) |\psi^{[1]}(t)\rangle + \frac{d}{dt} \left( \frac{ie^{-i\Gamma(t)}}{\Omega(t)} V(t) |\psi^{[0]}(t)\rangle + H.C \right) \quad (4.8)$$

$$\dots\dots (4.9)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi^{[n]}(t)\rangle = \widehat{H}_0(t)|\psi^{[n]}(t)\rangle + \frac{d}{dt}\left(\frac{ie^{-i\Gamma(t)}}{\Omega(t)}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\widehat{Q}}{\Omega(t)}\right)^k V(t)|\psi^{[n-k-1]}(t)\rangle + H.C.\right) \quad (4.10)$$

关于  $|\psi^{[n]}(t)\rangle$  较高阶的方程只包含较低级  $|\psi^{[0]}(t)\rangle, \dots, |\psi^{[n-1]}(t)\rangle$  的贡献, 这个方程的确可以逐级求解。

事实上, 含时微扰论可以用以上观点加以重新描述, 这种描述反映了量子跃迁的本质特征。设  $H'(t)$  是  $H(t) = H_0 + H'(t)$  的含时微扰,  $|n\rangle$  是  $H_0$  对应于本征值  $E_n$  本征态波函数

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t)e^{-iE_n t}|n\rangle \quad (4.11)$$

满足薛定谔方程, 可以等效地表达为

$$i\frac{d}{dt}C_n = \langle n | H'(t) | n \rangle C_n + \sum_{m \neq n} e^{-i\Omega_{mn}(t)} \langle n | H'(t) | m \rangle C_m \quad (4.12)$$

其中  $\Omega_{mn}(t) = (E_m - E_n)t$ 。不失一般性, 可令  $\langle n | H'(t) | n \rangle = 0$  (即将  $H'(t)$  的对角元吸收至  $H_0$  中)。设初始条件为  $C_n(0) = \delta_{nk}$ 。此时零级方程为  $i\frac{d}{dt}C_n^{(0)} = 0$ , 解为  $C_n^{(0)}(t) = \delta_{nk}$ 。一级方程为

$$i\frac{d}{dt}C_n^{(1)}(t) = \sum_{m \neq n} \frac{d}{dt}\left(\frac{ie^{-i\Omega_{mn}(t)}}{\Omega_{mn}} \langle n | H'(t) | m \rangle C_m^{(0)}\right) \quad (4.13)$$

代入零级解, 我们有

$$i\frac{d}{dt}C_n^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ie^{-i\Omega_{kn}(t)}}{\Omega_{kn}} \langle n | H'(t) | k \rangle\right) \quad (4.14)$$

$$= e^{-i\Omega_{kn}(t)} \langle n | H'(t) | k \rangle + \frac{ie^{-i\Omega_{kn}(t)}}{\Omega_{kn}} \langle n | \frac{d}{dt}H'(t) | k \rangle \quad (4.15)$$

略去等号右边第二项, 我们有

$$C_n^{(1)}(t) = -i \int_0^t e^{-i\Omega_{kn}(t')} \langle n | H'(t') | k \rangle \quad (4.16)$$

此即含时微扰论的结果。

### §4.2 量子绝热近似等方法的重新表述

类似地, 应用快变因子消除方法, 可以重新表述量子绝热近似, 旋波近似和二能级近似。通过这种表达, 我们可以很方便地计算这些近似的高阶修正。

#### (一) 量子绝热近似方法

对于第二节中的非简并情况, 量子绝热近似波函数

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) e^{-i \int_0^t E_n(\tau) d\tau} |n(t)\rangle \quad (4.17)$$

中的待定系数可以重新表达为

$$i \frac{d}{dt} C(t) = (\hat{H}_0(t) + W(t)) C(t) \quad (4.18)$$

其中

$$C(t) = (C_1(t), C_2(t), \dots, C_N(t))^T \quad (4.19)$$

是列矢量, 而

$$\hat{H}_0(t)_{mn} = \begin{cases} 0, m \neq n \\ -i \langle n | \frac{d}{dt} | n \rangle, m = n \end{cases} \quad (4.20)$$

定义了一个对角方阵  $H_0(t)$ ;

$$W_{mn} = \begin{cases} -i \exp[-i \Gamma_{mn}(t)] \langle m | \frac{d}{dt} | n \rangle, m \neq n \\ 0, m = n \end{cases} \quad (4.21)$$

定义了快变部分  $W_{mn}$ , 其中

$$\Gamma_{mn} = \int_0^t (E_m - E_n) dt' \quad (4.22)$$

这时, 把  $H_0(t)$  视为慢变因子把  $W_{mn}$  看成快变因子, 则可直接利用快变因子消除方法计算  $C(t)$ , 其零解自然给出 Berry 几何相因子。

#### (二) 二能级近似

在原子物理等领域, 由于系统能级结构非常复杂, 研究它们与外部光场相互作用时, 只考虑其中频率与外场频率接近的少数能级。这种近似方法在物理上是相当直观的。基本原因是近共振的能级比远共振的能级影响更重要。现在的问题是, 我们能否定量地比较这些影响? 能否定量考虑“二能级近似”

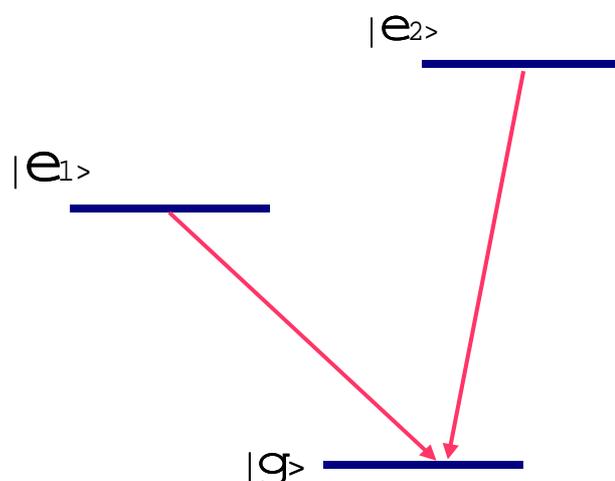


图 5: V 型三能级原子

以外的效应，从而量化的说明“二能级近似”的条件是什么？本节讨论的快变因子消除方法可以回答这些问题。

考虑如图 5 所示的 V 型三能级原子，两个激发态  $|e_1\rangle, |e_2\rangle$  与基态  $|g\rangle$  的能级差分别为  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ，一个单模腔场与它们的耦合强度分别为  $g$  和  $\mu$ 。在相互作用表象中，哈密顿量  $H = H_s + H_f$  分为高频部分

$$H_f = \mu(e^{-i\Omega t} a^+ |g\rangle \langle e_2| + H.C) \quad (4.23)$$

和低频部分

$$H_s = g(e^{-i\delta t} a^+ |g\rangle \langle e_1| + H.C) \quad (4.24)$$

其中  $\Omega = \omega_2 - \omega, \delta = \omega_1 - \omega$ ， $\omega$  为光场频率。当  $|\Omega| \gg |\delta|$  时，我们可以把  $H_f$  当作慢变量，而把  $H_s$  当成快变量，用快变因子消除法可以得到波函数的零级解

$$|\psi^{[0]}(t)\rangle = U^{(0)} |\psi(0)\rangle \quad (4.25)$$

其中零级演化矩阵  $U^{(0)}$  可精确得到，它是一个分块对角矩阵

$$U^{(0)}(t) = \text{diag}[1, U_0^{(0)}(t), U_1^{(0)}(t), \dots, U_N^{(0)}(t)] \quad (4.26)$$

其中

$$U_n^{[0]}(t) = \begin{pmatrix} A_n(t) & B_n(t) & 0 \\ -B_n^*(t) & A_n^*(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

$$A_n(t) = e^{-i\frac{\delta t}{2}} [\cos \Omega_n t + i\frac{\delta}{2\Omega_n} \sin \Omega_n t] \quad (4.28)$$

$$B_n(t) = -\frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n} e^{-i\frac{\delta t}{2}} \sin(\Omega_n t) \quad (4.29)$$

$$\Omega_n = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + g^2(n+1)} \quad (4.30)$$

这里, 我们已注意到  $\{|g, n+1\rangle, |e_1, n\rangle, |e_2, n\rangle\}$  是一个不变子空间,  $U_n^{[0]}(t)$  是在给定  $n$  时, 演化矩阵的约化子块。  $U_n^{[0]}(t)$  是一个  $2 \times 2$  子块与  $1 \times 1$  子块构成矩阵。这说明, 第三个态  $|e_2, n\rangle$  不参与系统运动的耦合, 我们只须考虑  $|g\rangle$  和  $|e_1\rangle$  的耦合, 从而给出二能级近似。

为了考虑第三个能级的影响, 我们应用快变因子消除方法的一阶修正  $|\psi^{[1]}(t)\rangle$  的方程

$$i\frac{d}{dt} |\psi^{[1]}(t)\rangle = H_s |\psi^{[1]}(t)\rangle + \frac{d}{dt} \left[ \frac{ie^{-i\Omega t}}{\Omega} \mu a^+ |g\rangle \langle e_2| + H.C. \right] |\psi^{[0]}(t)\rangle \quad (4.31)$$

选择初态不含有  $|e_2\rangle$  的成分

$$|\psi_n(0)\rangle = (C_1, C_2, 0)^T (|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1) \quad (4.32)$$

我们得到一阶近似解为

$$|\psi_n^{[1]}(0)\rangle = (0, 0, \phi_3(t)) \quad (4.33)$$

$$\phi_3(t) = \frac{-\mu\sqrt{n+1}}{\Omega} e^{i\Omega t} (C_1 A_n(t) + C_2 B_n(t) - C_1) \quad (4.34)$$

由此可以看到, 当

$$\frac{\mu\sqrt{n+1}}{|\Omega|} \ll 1 \quad (4.35)$$

时, 一阶近似可以忽略, 这就是二能级近似成立的条件。这意味着必须要求弱光场。从物理上讲, 量子化强光场会导致多光子跃迁。需要指出的是, 零级近似导致的振幅正比于  $g\sqrt{n+1}/|\delta|$ , 与一级过程相比二能级近似条件也可以表达为  $\frac{\mu}{g} \frac{|\delta|}{|\Omega|} \ll 1$ 。

### (三) 旋转波近似

旋转波近似是一种典型的快因子消除近似。这种近似方法被广泛地应用于量子光学和原子物理，这种方法通常被理解为一种忽略虚光子产生消灭过程的近似。在许多问题中，需要了解偏离旋转波近似的高阶效应，快因子消除近似方法会为我们提供计算这种高阶效应的有效手段。

在偶极近似下，二能级原子与电磁场的相互作用可以由哈密顿量

$$H = \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \omega_1 (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) + g(|e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e|)(a + a^\dagger) \quad (4.36)$$

描述。在相互作用表象中，它可以分为慢变部分

$$H_s = g |e\rangle \langle g| a e^{i\delta t} + H.C \quad (4.37)$$

和快变部分

$$H_f = g |e\rangle \langle g| a^\dagger e^{i\Omega t} + H.C \quad (4.38)$$

这里  $\Omega = \omega_1 + \omega$ ,  $\delta = \omega_1 - \omega$ , 其中慢变部分就是通常旋转近似的 Jagnes-Cmmings (JC) 哈密顿量。利用快因子消除近似，我们可以解析地计算出 JC 模型结果的一阶修正，只是结果冗长，本文不再列出。根据这个结果，可以看到旋转波近似成立（JC 模型适用）的条件就是快因子消除近似一阶结果被忽略的条件

$$\frac{g\sqrt{n+1}}{|\Omega|} \ll 1 \quad (4.39)$$

显然，这是一个弱耦合近共振的条件。

## §5 玻恩—奥本海默近似及其诱导规范场和拓扑作用量

以上各节的讨论假设时变系统参数是按给定的方式变化。这意味着，它不是一个由相互作用哈密顿量支配的动力学变量。事实上，完整的量子力学理论应当把时变参数也作为一个动力学变量加以描述。这个思想起源于分子物理。当年，玻恩和奥本海默在研究原子分子结构时发现，核自由度变化是相对缓慢的，而电子运动是很快的，它会对核子的空间位形有瞬间的响应。现在已经知道，在这种情况下，核子运动不足以激发电子态跃迁。由快电子和慢变的核子组成的分子体系的波函数，可近似地分为电子部分与核子部分。这种近似方法称为 Born-Oppenheimer 近似（简称 B-O 近似）[19-20]。

在简并情况下推广 Berry 相位时, Wilczek 和 Zee 等人就已经意识到, Abelian 或非 Abelian 的诱导规范结构, 可以出现在没有普通规范对称性的量子力学体系的绝热演化中。随后, 诱导规范场的概念被提出并得到进一步发展。对于固定的核子位形, 解出电子部分的波函数, 关于核子部分的有效运动方程则包括一个与磁势类似的矢量势  $\mathbf{A}$ , 它代表电子对核子的有效作用; 电子波函数相位的定域不确定性相当于  $\mathbf{A}$  的规范变换。  $\mathbf{A}$  被称为诱导规范势或 Berry 联络。现在一个自然的问题是, 诱导规范场是否具有直接的可观察物理效应 [23]?

我们可在一般的前提下回答这个问题 [29-31]。首先, 把分离不同粒子 (例如, 电子与核子) 自由度的 B-O 近似方法加以推广, 以用来处理同一个粒子的空间自由度和自旋自由度的分离问题。这种分离导致了一类新的诱导规范场。这类规范场描述了“快变”的自旋部分对“慢变”的空间部分的影响。进而, 我们还建议在绝热条件破坏时处理非绝热效应的一般近似方法 - 推广的 Born-Oppenheimer 近似。这种方法与前面讨论的高级量子绝热近似方法平行, 只是在后者处理的问题中, 慢变自由度被当作人为控制的非动力学变量。

从以下的一级近似看到, 验证 Berry 相位的 Bitter-dubbers (B-D) 实验 [30] 正是代表实验室坐标系中诱导规范的 Aharonov-Bohm 相位的可观测物理效应。这个实验以前被间接地理解为随中子运动的参照系内 Berry 相位的效应: 非均匀磁场中的运动中子将“看到”一个时变的磁场。利用本文的二级近似, 给出了绝热条件破坏时 B-D 实验中出现的最低阶非绝热效应的定量预言。这个结果有可能在进一步的实验中得到证实。

### §5.1 玻恩-奥本海默近似及其推广 [29-31]

本节讨论比 B-D 实验有关的更一般情况。考虑具有自旋的中性粒子在非均匀外场

$$B \equiv B(X) = (B_1(X), B_2(X), \dots, B_D(X)) \quad (5.1)$$

中的运动。空间点坐标记  $X = (X_1, X_2, X_3) \equiv (x, y, z)$  粒子的哈密顿量是

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + V(X) + \hat{H}_s[B(X)] \quad (5.2)$$

其中  $\hat{H}_s \equiv \hat{H}_s[B(X)]$  代表外场  $B(X)$  与自旋的耦合作用。

在以下讨论中, 我们假定: 对任意给定的  $X, \widehat{H}_s[B(X)]$  有非简并的正交归一本征函数  $\chi_n = \chi_n(X) (n = 1, 2, \dots, N)$ , 相应的本征值为  $\varepsilon_n(X) \equiv \varepsilon_n$ . 由于  $\chi_n(X)$  的完备性, 可设

$$\tilde{\Phi} = \sum_{n=1}^N \Phi(X, n) \chi_n(X) \quad (5.3)$$

是定态 Schrodinger 方程  $\widehat{H}\tilde{\Phi} = E\tilde{\Phi}$  的解. 则在征函数  $\tilde{\Phi}$  中待定的空间部分  $\Phi(n) \equiv \Phi(X, n)$  满足有效运动方程组

$$\widehat{H}(n)\Phi(n) = E\Phi(n) + F(n)\Phi(n) + \sum_{m \neq n} \widehat{O}(n, m)\Phi(m); n = 1, 2, \dots, N \quad (5.4)$$

其中

$$\begin{cases} \widehat{H}(n) = -\frac{\hbar^2}{2M}[\nabla - iA(n)]^2 + V(X) + \varepsilon_n(X); A(n) = i\langle \chi_n | \nabla \chi_n \rangle \\ F(n) = \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{m \neq n} \langle \nabla \chi_n | \chi_m \rangle \langle \chi_m | \nabla \chi_n \rangle \\ \widehat{O}(n, m) = \frac{\hbar^2}{2M} [2\langle \chi_n | \nabla \chi_m \rangle \nabla + \langle \chi_n | \nabla^2 \chi_m \rangle] \end{cases} \quad (5.5)$$

现在基于物理考虑分析方程 (5.4) 的解. 当外场  $B(X)$  完全均匀时,  $\widehat{H}_s[B(X)]$  与  $X$  无关, (5.4) 式可简化为

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Phi(n) + [V(X) + \varepsilon_n] \Phi(n) = E\Phi(n) \quad (5.6)$$

这意味着粒子的自由度完全分离, 即  $\tilde{\Phi} = \Phi(n)\chi_n$  是  $\widehat{H}\tilde{\Phi} = E\tilde{\Phi}$  的解. 可以设想, 当  $\widehat{H}_s[B(X)]$  "稍稍" 依赖于  $X$  (以后说明其定量含义), (5.4) 式的右端第二、三项是一个小量, 它们使得自旋自由度和空间自由度有微弱的耦合, 可以把它们作为微扰处理.

然而, 考虑微扰项时, (5.4) 式中的各个分量  $\Phi(n) (n = 1, 2, \dots, N)$  是互相耦合的, 标准的微扰理论无法直接应用. 为了应用标准的微扰方法, 我们定义矢量波函数  $\Phi$  和矩阵的哈密顿量  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + W$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi(1) \\ \Phi(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi(n) \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{H}}_0 = \begin{pmatrix} \widehat{H}(1), & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \widehat{H}(2), & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & \widehat{H}(3), \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$$\hat{W} = - \begin{pmatrix} F(1), & \hat{O}(1,2), & \hat{O}(1,3), & \dots, & \hat{O}(1,N) \\ \hat{O}(2,1), & F(2), & \hat{O}(2,3), & \dots, & \hat{O}(2,N) \\ \hat{O}(3,1), & \hat{O}(3,2), & F(3), & \dots, & \hat{O}(3,N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{O}(N,1), & \hat{O}(N,2), & \hat{O}(N,3), & \dots, & F(N) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

方程组 ( 5.4 ) 可改写为矩阵值的带微扰定态 Schrodinger 型方程

$$(\hat{\mathcal{H}}_0 + \epsilon \hat{W})\Phi = E\Phi \quad (5.9)$$

其中  $\epsilon$  是为了进行微扰计算引入的突微参量, 计算结束后, 令其为 1。

现在应当指出的是, “零级”哈密顿量  $\hat{\mathcal{H}}_0$  中含有  $\chi_n(X) (n = 1, 2, \dots, N)$  的一次梯度项  $A(n) = i\langle \chi_n | \nabla \chi_n \rangle$  和二次梯度项  $A(n)^2$ 。之所以这样处理, 有以下原因: 微扰的出现, 本质上是由磁场的非均匀性  $\nabla \hat{H}_s[B(X)]$  引起的。 $\hat{H}_s[B(X)]$  确定的本征态  $\chi_n(X)$  的位相是不唯一的, 即当  $\chi_n(X) \rightarrow \chi'_n(X) = e^{i\theta(X)}\chi_n(X)$  时

$$|\langle \chi_n | \nabla \chi_m \rangle| \rightarrow |\langle \chi'_n | \nabla \chi'_m \rangle| = \begin{cases} |\langle \chi_n | \nabla \chi_m \rangle|, & m \neq n, \\ |i\nabla\theta(X) + \langle \chi_n | \nabla \chi_n \rangle|, & m = n \end{cases} \quad (5.10)$$

这表明  $|\langle \chi_n | \nabla \chi_m \rangle| (m \neq n)$  的量级与  $\chi_n(X)$  相位的选择无关; 而  $|A(n)| = i|\langle \chi_n | \nabla \chi_n \rangle|$  的量级则依赖于  $\chi_n(X)$  相位的选择。因而没有充分的理由认为  $A(n)$  是一级扰动项, 故可以把  $A(n)$  和  $A^2(n)$  放到  $\hat{\mathcal{H}}_0$  中; 以后还会看到  $\chi_n(X)$  位相选择不影响物理观测。

由 ( 5.9 ) 式出发, 按着照标准的微扰理论, 设

$$\Phi_K = \sum_{l=0}^{\infty} \epsilon^l \tilde{\Phi}_K^{[l]}, E_K = \sum_{l=0}^{\infty} \epsilon^l E_K^{[l]} \quad (5.11)$$

是 ( 5.9 ) 式的第 K 个解; 由此可以得到  $N$  种“矢量”值的零级解

$$\tilde{\Phi}_K^{[0]}(1) = \begin{pmatrix} \Phi_K^{[0]}(1) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{\Phi}_K^{[0]}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_K^{[0]}(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \tilde{\Phi}_K^{[0]}(N) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_K^{[0]}(N) \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

它们分别对应于本征值  $E_K^{[0]}(1), E_K^{[0]}(2), \dots, E_K^{[0]}(N)$ , 其中  $\tilde{\Phi}_K^{[0]}(n)$  和  $E_K^{[0]}(n) (n = 1, 2, \dots, N)$  由方程

$$\widehat{H}(n)\Phi_K^{[0]}(n) = E_K^{[0]}\Phi_K^{[0]}(n), n = 1, 2, \dots, N \quad (5.13)$$

确定。方程 (5.13) 恰是 Wilczek 等人给出的  $A(n) \neq 0$  的 B-O 近似方程。它表明, 在零级近似 (绝热近似) 下, 自旋自由度对空间自由度的影响相当于提供一个标量背景场  $\epsilon_n(X)$  和矢量背景场  $\mathbf{A}(n)$ —诱导规范场。

由此, 标准的定态微扰方法可以给出问题任意阶近似解。例如, 二级近似解是

$$\begin{cases} E_K^{[1]} = -F(n), \\ \Phi_k^{[1]}(n) = \sum_{(K', n') \neq (K, n)} \frac{\langle \Phi_{k'}^{[0]}(n') | \widehat{O}(n', n) | \Phi_k^{[0]}(n) \rangle}{E_{K'}^{[0]}(n') - E_K^{[0]}(n)} \Phi_{k'}^{[0]}(n') \end{cases} \quad (5.14)$$

由此得知, 当 B-O 近似条件或称绝热近似条件

$$\left| \frac{\langle \Phi_{k'}^{[0]}(n') | \widehat{O}(n', n) | \Phi_k^{[0]}(n) \rangle}{E_{K'}^{[0]}(n') - E_K^{[0]}(n)} \right| \ll 1, (K, n) \neq (K', n') \quad (5.15)$$

成立, 我们可以忽略一级修正, 只取零级近似—B-O 近似解。

## §5.2 Bitter-Dubbers 实验的理论分析

在 Wilczek 等人工作的基础上, 我们给出了处理自由度分离和计算非绝热效应的一般方法—推广的 B-O 近似。以下将应用该方法去讨论 B-D 实验相关的问题。

在 B-D 实验中, 采用了螺旋状的非均磁场  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(z) = (B_x(z), B_y(z), B_z(z))$ : (图 6)

$$\begin{cases} B_x = B \sin \theta \cos(2\pi z/L), B_y = B \sin \theta \sin(2\pi z/L) \\ B_z = B \cos \theta \end{cases} \quad (5.16)$$

( $\theta$  与  $B$  均为常数) 与该场相互作用的运动中子具有哈密顿量

$$\widehat{H} = \frac{1}{2M} \widehat{P}^2 + g\mathbf{B}(z) \cdot \mathbf{S}, \quad (5.17)$$

其中  $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\sigma$  ( $\sigma$  是 Pauli 矩阵)。对于任意给定的  $z$ ,  $\widehat{H}_s \equiv \widehat{H}_s[\mathbf{B}(z)] = g\mathbf{B}(z) \cdot \mathbf{S}$  的

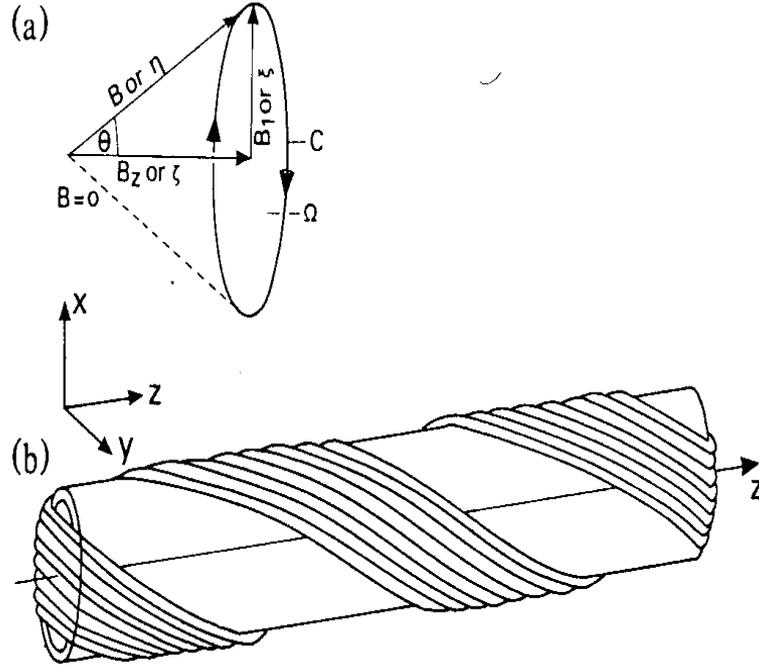


图 6: 螺旋状非均磁场的空间构形

本征值和本征函数分别是  $\epsilon_n = (-1)^{n+1} \hbar \omega_0 \frac{1}{2} g B \hbar (n = 1, 2)$  和

$$\chi_1 \equiv \chi_1[B(z)] = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \exp\left[\frac{-2\pi z}{L}\right] \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \chi_2 \equiv \chi_2[B(z)] = \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \exp\left[\frac{-2\pi z}{L}\right] \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

当磁场  $B(x)$  足够均匀、足够强且中子沿  $x$  轴的速度足够小时，B-O 近似适用；此时空间部分的有效运动方程是

$$-\frac{\hbar^2}{2M} [\nabla - iA(n)]^2 \Phi_{\mathbf{k}}^{[0]}(n) + \epsilon_n \Phi_{\mathbf{k}}^{[0]}(n) = E_{\mathbf{k}}^{[0]}(n) \Phi_{\mathbf{k}}^{[0]}(n), n = 1, 2 \quad (5.19)$$

其中诱导规范场  $A(n)$  的显式是

$$A(n) = i \langle \chi_n | \nabla \chi_n \rangle = \frac{\pi}{L} (1 + (-1)^{n+1} \cos \theta) \mathbf{e}_z, n = 1, 2 \quad (5.20)$$

方程 (5.19) 的解是

$$\begin{cases} \Phi_{\mathbf{k}}^{[0]}(n) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \exp\left[i \int_0^{\mathbf{X}} A_\mu(n) dX^\mu\right] \exp[i\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}], \\ E_{\mathbf{k}}^{[0]}(n) = \hbar^2 |\mathbf{K}|^2 / (2M) + (-1)^{n+1} \hbar \omega_0 \end{cases} \quad (5.21)$$

设  $t = 0$  时中子束在  $z = 0$  处沿  $z$  轴极化于  $|+\frac{1}{2}\rangle$  态上，在  $t = T$  时到达  $z = L$  处。在这个过程中， $\mathbf{B}(z)$  经历了参数空间  $M : \{\mathbf{B}\}$  中的一个环路

$\{\mathbf{B}(z) \mid \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}(L)\}$ 。作为诱导规范势  $\mathbf{A}(n)$  的 Aharonov-Bohm 相位式中的附加相位  $\Omega = \int_0^{Le_x} A_\mu(n) dX^\mu$  可表达为参数空间  $V_p$  上的环路相位 ( Loop Phase ):

$$\Omega = \int_0^{Le_x} A_\mu(n) dX^\mu = \int_0^L \langle \chi_n \mid \frac{\partial}{\partial z} \chi_n \rangle dz \quad (5.22)$$

$$= \oint_C \langle \chi_n \mid \frac{\partial}{\partial B_\mu} \chi_n \rangle dB^\mu \equiv \nu_n(C) \equiv \nu_n \quad (5.23)$$

当  $n = 1$  时,  $\nu_1 = 2\pi \cos^2 \frac{\theta}{2}$  恰是环路  $C$  对  $\mathbf{B} = 0$  点张成的立体角,  $\nu_2$  是它的补角; 它们与  $\mathbf{B}$  随时间作周期变化时的 Berry 相位一致。由于  $\nu_n(C)$  与哈密顿量  $\widehat{H}_s[\mathbf{B}(z)]$  沿环路  $C$  的具体变化方式无关, 它是一个具有拓扑性质的量。

写出  $t = T$  时达到  $z = L$  处中的波函数

$$\begin{aligned} \Psi(T, L) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \exp[iK_z l] \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \exp[iE_{\mathbf{K}}^{[0]}(1)T/\hbar + i\nu_1] \right. \\ &\quad \left. \cdot |\chi_1[\mathbf{B}(L)]\rangle + \sin \frac{\theta}{2} \exp[iE_{\mathbf{K}}^{[0]}(2)T/\hbar + i\nu_2] \cdot |\chi_2[\mathbf{B}(L)]\rangle \right\} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$= a(T) \left| +\frac{1}{2} \right\rangle + b(T) \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (5.25)$$

并注意,  $\nu_1 + \nu_2 = 4\pi$  时, 可得到中子束沿  $z$  轴方向的极化率

$$P_z = |a(T)|^2 - |b(T)|^2 = 1 - 2 \sin^2[\omega_0 T + \nu_1(C)] \cdot \sin^2 \theta \quad (5.26)$$

其中由诱导规范场引起的相移  $\nu_1(C)$  正是导致 B-D 实验结果的附加相位。因此, B-D 实验结果可以直接地理解为实验室坐标系内诱导规范场的可观察物理效应, 这种理解不仅比原来的理解来的自然, 而且表明了诱导规范场存在直接的可观测效应。

### §5.3 量子绝热过程的拓扑作用量

关于 Berry 相位的动力学意义和诱导规范场的物理实质, Kurtsuji 和 Iida 从路径积分的角度给出了很好的分析。在绝热条件下, 他们积分出具有快、慢两套附加的拓扑作用量包含于其中, 它类似于反常问题中的 Wess-Zumino 项。

考虑具有哈密顿量

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0(X, P) + \widehat{h}(X, q, p, \xi) \quad (5.27)$$

的量子体系, 其中  $X$  是慢变自由度,  $P$  是相应于  $X$  的正则动量;  $q$  是快变自由度,  $p$  是相应  $q$  的正则动量;  $\xi$  是  $p$  以外的快变自由度。例如是自旋自由

度。在以下的讨论中我们记  $\widehat{H}_0 = \widehat{H}_0(X, P), \widehat{h} = \widehat{h}(X) \equiv \widehat{h}(X, q, p, \xi)$ 。假如对任意给定的  $X, \widehat{h}(X)$  有非简并的本征函数  $|n[X]\rangle$ , 相应的本征值为  $\lambda_n[X]$ 。作为动力学变量,  $X = X(t)$  的演化规律由动力学方程支配而不是人为控制。这时, 我们记  $\lambda_n(t) = \lambda_n[X(t)], |n(t)\rangle = |n[X(t)]\rangle, |n(t), X(t)\rangle = |n(t)\rangle \otimes |X(t)\rangle$ , 其中  $|X(t)\rangle$  是  $X$  的本征函数, 本征值是  $X(t)$ 。现在考虑从  $|n(0), X(0)\rangle$  到  $|m(T), X(T)\rangle$  的跃迁几率幅:

$$K_{nm}(T) = \langle m(T)X(T) | \exp[-i\widehat{H}T] | n(0)X(0) \rangle \quad (5.28)$$

令  $\epsilon = T/N, t_K = K \cdot \epsilon$ , 并记  $X_K = X(t_K), \widehat{h}(K) = \widehat{h}(X_K)$  利用路径积分方法作计算得

$$K_{nm}(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left( \prod_{K=1}^{N-1} dX_K \right) \langle m(T)X(T) | \exp[-i\widehat{H}\epsilon] | X_{N-1} \rangle \\ \times \langle X_{N-1} | \exp[-i\widehat{H}\epsilon] | X_{N-2} \rangle \cdots \langle X_1 | \exp[-i\widehat{H}\epsilon] | n(0)X(0) \rangle \quad (5.29)$$

$$= \int d\mu(X, P) T_{nm}(T) \exp[iS_0(T)] \quad (5.30)$$

其中,

$$d\mu(X, P) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{K=1}^{N-1} \left[ \frac{1}{2\pi} dX_K \cdot dP_K \right] \\ S_0(T) = \int_0^T [P\dot{X} - \widehat{H}_0(X, P)] dt \\ T_{nm}(T) = \langle m(T)X(T) | \mathcal{P} \cdot \exp[-i \int_0^T \widehat{h}(t) dt] | n(0)X(0) \rangle \quad (5.31)$$

从 (5.28) 到 (5.29) 的推导, 完全类似于 [3,4] 中  $\sum_n K_{nn}(T)$  的推导。

现在计算非绝热情况下编时积分  $\mathcal{P} \cdot \exp[-i \int_0^T \widehat{h}(t) dt]$  的矩阵元到一级近似, 由  $\sum_{mK} |m_K(t_K)\rangle \langle m_K(t_K)| = 1$  我们有

$$T_{nm}(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{K=N}^1 \sum_{n_K} \langle n_K(t_K) | \exp[-i\widehat{h}(K-1)\epsilon] | n_{K-1}(t_{K-1}) \rangle \quad (5.32)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{K=N}^1 \sum_{n_K} \exp[-i\epsilon \lambda_{n_{K-1}}(t_{K-1})] \cdot \langle n_K(t_K) | n_{K-1}(t_{K-1}) \rangle \quad (5.33)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n_1} \sum_{n_2} \cdots \sum_{n_N} \exp[-i\epsilon \times \sum_{K=1}^N \lambda_{n_{K-1}}(t_{K-1})] \prod_{K=N}^1 \lambda_{n_{K-1}}(t_{K-1}) \\ \prod_{K=N}^1 \left[ \delta_{n_K n_{K-1}} - \epsilon \langle n_K(t_K) | \frac{\partial}{\partial t_K} n_{K-1}(t_{K-1}) \rangle \right] \quad (5.34)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n_1} \sum_{n_2} \cdots \sum_{n_N} \left\{ \exp[-i\epsilon \sum_{K=1}^N \lambda_{n_{K-1}}(t_{K-1})] \delta_{mn} - \sum_{l=1}^N (\exp[-i\epsilon$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{K=1}^N \lambda_m(t_{K-1}) \cdot \epsilon \cdot \langle m(t_l) | \frac{\partial}{\partial t_l} | n(t_l) \rangle \\
& \cdot \exp[-i\epsilon \sum_{K=1}^N \lambda_m(t_{K-1})] \} \\
& = \lim_{N \rightarrow \infty} \{ \exp[-i\epsilon \sum_{K=1}^N \lambda_{n_{K-1}}(t_{K-1})] \cdot \exp[-i\epsilon \sum_{K=1}^N \langle n_K(t_K) | \frac{\partial}{\partial t_K} | n(t_K) \rangle] \delta_{mn} \\
& - \sum_{l=1}^N (\exp[-i \sum_{K=l+1}^N \lambda_m(t_{K-1}) \epsilon] \langle m(t_l) | \frac{\partial}{\partial t_l} | n(t_l) \rangle \epsilon \\
& \cdot \exp[-i \sum_{K=1}^l \lambda_n(t_{K-1}) \epsilon]) \cdot (1 - \delta_{mn}) \} \\
\end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \exp[-i \sum_{K=1}^l \lambda_n(t_{K-1}) \epsilon] \cdot (1 - \delta_{mn}) \} \\
\end{aligned} \tag{5.36}$$

即

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{nm}(T) &= \exp[-i \int_0^T \lambda_m(t) dt] \{ \exp[i \int_0^t A_n(t) dt] \delta_{mn} \\
& - (1 - \delta_{mn}) \int_0^T dt \langle m(t) | \frac{\partial}{\partial t} n(t) \rangle \\
& \cdot \exp[-i \int_0^t (\lambda_n(\tau) - \lambda_m(\tau)) dt] \} \\
\end{aligned} \tag{5.37}$$

其中

$$A_n(t) = \mathcal{A}_n(X)_\mu \cdot \frac{dX^\mu}{dt} \equiv i \langle n[X] | \frac{\partial}{\partial X^\mu} n[X] \rangle \frac{dX^\mu}{dt} \tag{5.38}$$

是诱导规范势  $\mathcal{A}_n(X)_\mu$  的线性组合。

下面我们说明公式 (5.27) 是一级近似的结果 (相对于绝热近似作为零级近似), 这时允许绝热条件破坏, 因此, 拓扑项的出现与绝热条件无关. 事实上, 当  $m \neq n$  时, (5.30) 给出的跃迁几率幅是

$$\begin{aligned}
K_{nm}(T) &= - \int d\mu(X, P) \{ \exp[iS_0(T) - i \int_0^T \lambda_m(t) dt] \cdot \int_0^T dt \\
& \times \langle m(t) | \frac{\partial}{\partial t} n(t) \rangle \exp[-i \int_0^t (\lambda_n(\tau) - \lambda_m(\tau)) d\tau] \} \\
\end{aligned} \tag{5.39}$$

它只涉及到  $\hat{h}(t)$  的一次微商项。当  $X(t)$  变化足够缓慢、使得绝热条件满足,  $K_{nm}(T)$  中积分项因子  $\exp[-i \int_0^t (\lambda_n(t) - \lambda_m(t)) dt]$  振荡很快, 它抹平了  $\langle m(t) | \frac{\partial}{\partial t} n(t) \rangle$  使得  $K_{nm}(t) \rightarrow 0$ 。这时

$$K_{nn}(T) = \int d\mu(X, P) \cdot \exp[iS_0(t) - i \int_0^T \lambda_n(t) dt + i \int_0^T A_n(t) dt] \tag{5.40}$$

足以描述体系的全部动力学, 拓扑项  $S_{Top}(T) \equiv \int_0^T A_n(t) dt$  可视为附加的拓扑作用量。支配慢变自由度的有效作用量和相应的拉氏量分别为

$$S_{eff} = S_0(T) - \int_0^T \lambda_n(t) dt + S_{Top}(T) \tag{5.41}$$

$$L_{eff} = L_0 - \lambda_n(t) + A_n(X)_\mu \cdot \dot{X}_\mu \quad (5.42)$$

当我们具体取  $\widehat{H}_0 = \frac{1}{2M}\widehat{P}^2 + V(X)$  时, 由 ( 5.42 ) 得到支配慢变自由度的有效哈密顿量

$$\widehat{H}_{eff} = -\frac{1}{2M}(\nabla - iA_n(X))^2 + V(X) - \lambda_n[X] \quad (5.43)$$

## §6 量子绝热近似方法在腔量子电动力学中应用

量子绝热近似理论虽然有很长的历史, 但在目前物理学的前沿领域研究仍然有着广泛的应用。本节将介绍这个理论目前是怎样应用于光与原子相互作用研究的 [45]。目前, 几个重要实验工作是用单光子或少量光子在微腔中囚禁原子 [46]。它们的基本原理是应用 BO 量子绝热近似的基本思想。

微腔量子电动力学 (或称腔 QED) [45] 是原子分子物理与量子光学的交叉研究领域。它重点研究特定边界下的量子光场与其中原子相互作用的基本规律。通过改变谐振腔的几何形状, 人们可以控制腔中电磁场的状态密度, 从而抑制或增强腔中原子的自发辐射。这方面一系列成功的实验, 大大加深了人们对光与物质相互作用理解。由于自发辐射意味着电磁场真空物理效应的存在, 腔 QED 的研究使将人们对真空的基本特性有了更深刻的认识。

腔 QED 研究的另外一个重要意义, 在于它能为人们考虑量子力学的基本问题 (如量子测量和薛定谔猫悖论) 提供一个可用以精确检验的实验室。特别值得指出是, 最近量子力学与信息科学的结合不仅使得人们在更加深入的层次上理解信息的基本特性, 而且使得人们有可能充分利用量子相干性进行信息的处理、传送和存贮, 从而导致量子信息观念建立并逐步实用化。在这方面, 腔 QED 提供了光信息和原子信息交换耦合的关键“结点”。利用绝热近似方法操纵腔 QED 的过程会在量子信息的研究中发挥重要的作用。本节将着重讨论这个问题 [47]。

### §6.1 微腔量子场囚禁原子

单原子与单模腔相互作用的基本哈密顿量是

$$H = \frac{p^2}{2m} + H_{JC}(x) \quad (6.1)$$

这里

$$H_{JC}(x) = \frac{1}{2}\omega_a(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) + \omega(a^+a + \frac{1}{2}) + g(x)(a|e\rangle\langle g| + a^+|g\rangle\langle e|) \quad (6.2)$$

其中  $\omega_a$  是原子基态  $|g\rangle$  和激发态  $|e\rangle$  之间的能级差； $\omega$  是谐振腔的本征频率，而  $a^+$  和  $a$  是腔场的产生消灭算符； $\frac{p^2}{2m}$  代表原子质心的动能，通过非均匀腔场  $\vec{v}(x)$ ，原子质心运动与其内部运动耦合起来。

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{\frac{2\pi\omega}{V}}\vec{v}(x) \cdot \vec{d}, 0 \leq x \leq L \\ g(x) = 0, x < 0 \text{ or } x > L \end{cases} \quad (6.3)$$

描述了偶极矩矢量为  $\vec{d}$  的原子与腔场的有效耦合， $V$  是腔场的有效体积。

在通常情况下，热原子的质心动量很大，与光场交换动量的效应可以忽略不计，原则上光场不会影响原子质心的运动。从数学上讲，我们这时可以把动能项看成是一个守恒量。从而，关于腔原子耦合的动力学，仅考虑典型的 JC 模型哈密顿量  $H_{JC}(x)$ 。然而，由于冷却原子技术的发展，人们可以把原子冷却到极低的温度（如可以把 Cr 原子冷却到  $0.17 \mu\text{K}$ ，速度只有每秒几个厘米），这时光场与原子作用（吸收放出光子）会影响原子质心运动。特定情况下，在实验中通过这种相互作用，单个光子可以囚禁冷原子。

根据 BO 量子绝热近似的观点，可以视原子质心自由度为慢变自由度，视内部自由度为快变自由度。通过绝热分离变量，可得到内部自由度残留于质心自由度上的一个有效势。特定的情况下，它可以是一个势阱，从而囚禁一个原子。要指出是，这个势阱是由电磁场的有效作用提供的，原子内部自由度只是一个“中间的介质”。

以下详细分析这种理论设想，对于固定的  $x, H_{JC}(x)$  的本征函数

$$|\phi_{+n}(x)\rangle = \cos\theta_n |e, n\rangle - \sin\theta_n |g, n+1\rangle \quad (6.4)$$

$$|\phi_{-n}(x)\rangle = \sin\theta_n |e, n\rangle + \cos\theta_n |g, n+1\rangle \quad (6.5)$$

可以看作光场与原子的束缚态（通常被称为缀饰态）。其中， $|f, n\rangle = |f\rangle \otimes |n\rangle$  ( $f = e, g$ )， $|n\rangle$  为光场的 Fock 态。 $\theta_n$  由

$$\text{tg}2\theta_n = \frac{2g(x)\sqrt{n+1}}{\delta} \quad (6.6)$$

确定, 其中  $\delta = \omega - \omega_a$  是光场和原子的失谐量。相应于  $|\phi_{\pm n}(x)\rangle$  的本征值为

$$\begin{aligned} V_{n\pm} &= V_{n\pm}(x) \\ &= (n+1)\omega \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + g(x)^2(n+1)} \end{aligned} \quad (6.7)$$

由于腔场的模式  $u(x)$  是空间位置的函数, 且在边界上为零,  $g(x=0) = 0$ 。故这时

$$V_{n\pm}(x=0) = (n+1)\omega \pm \frac{|\delta|}{2} \quad (6.8)$$

现在考察系统的整体波函数。当原子空间运动不足以激发内部跃迁, 则可以通过 BO 量子绝热近似分离整体的波函数

$$|\psi\rangle = \phi_{\pm n}(x) |\phi_{\pm n}[x]\rangle \quad (6.9)$$

其中空间部分的波函数  $\phi_{\pm n}(x)$  满足有效的薛定谔方程

$$\left[ \frac{p^2}{2m} + V_{n\pm}(x) \right] \phi_{\pm n}(x) = E \phi_{\pm n}(x) \quad (6.10)$$

这里, 由于内部本征函数  $|\phi_{\pm n}[x]\rangle$  是实的, 相应的诱导规范势是零。上式的物理意义是很清楚的: 当原子缓慢地穿过微腔时, 开始处在一个内部能量本征态  $|\phi_{\alpha n}[x]\rangle$  ( $\alpha = 1, 2$ ) 的原子, 会绝热在这个态上, 从而经历一个有效势  $V_{n\alpha}(x)$  的作用。  $V_{n\alpha}(x)$  的形状决定了微腔对原子是排斥的, 还是吸引的, 后者意味着对原子的囚禁。为此, 我们画出  $\delta > 0$  和  $\delta < 0$  时系统能级结构图 ( $X$  轴代表腔的位置) (图 7)。

我们先分析空腔的作用。这时  $n = 0$ , 直观地看, 空腔没有电磁场, 将不存在与原子的相互作用。但事实并非如此。这一点恰好反映了真空存在着直接的可观察效应! 在  $g(x) = 0$  处, 由于

$$\cos 2\theta_n = \frac{-\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4g^2(x)}} = \frac{\delta}{|\delta|} = \pm 1 \quad (6.11)$$

这里用了条件

$$H |\phi_{\pm n}\rangle = V_{n\pm} |\phi_{\pm n}\rangle$$

$$V_{n+} > V_{n-}$$

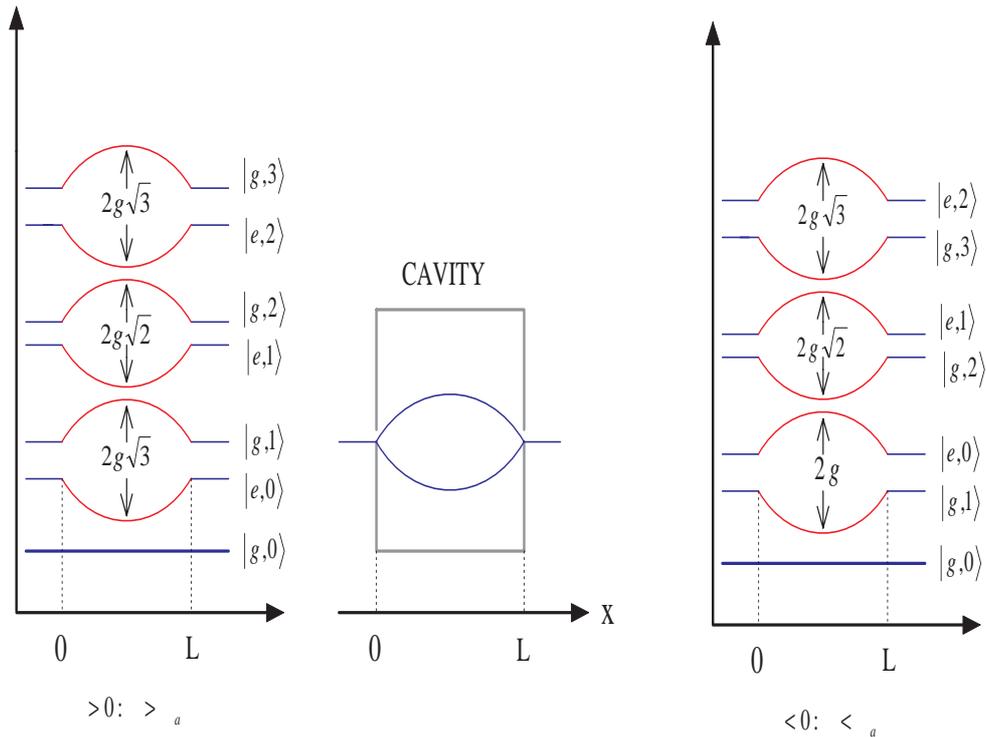


图 7:  $\delta > 0$  和  $\delta < 0$  时系统能级结构图

当原子跃迁频率  $\omega_a$  大于谐振腔频率  $\omega, \delta < 0, \cos 2\theta_n = -1, \theta_n = \pi$ 。于是，有

$$|\phi_{+0}(x=0)\rangle = |e, 0\rangle \tag{6.12}$$

$$|\phi_{-n}(x=0)\rangle = |g, 1\rangle \tag{6.13}$$

这就是说，一个激发态原子绝热地进入电磁场为零的空腔，它会转化到绝热本征态  $|\phi_{+0}(x)\rangle = |e, 0\rangle$  上。它经历的有效势  $V_{0+}(x) = \hbar\omega + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + g^2(x)}$  是一个势垒。从而，空腔会排斥进入它的激发态冷原子 (如图 7 右图)。这个真空效应的物理机制是非常清楚的：当  $\delta < 0$  时，在腔外  $|e, 0\rangle$  是体系的本征态，其能量为  $\omega_a$ ；进入腔后，绝热在态  $|\phi_{+0}(x)\rangle$  上，能量的改变为  $\delta E = \hbar\delta + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + g^2(x)}$  是一个正值。故微腔的真空电磁场令排斥这个原子。同样的有分析表明，如果腔内有一个光子，它会吸引基态的冷原子，这就是单光子囚禁单原子的基本原理。

对于另外一种情况  $\delta > 0$ , (如图 7 左图) 在  $g(x) = 0$  处,  $\cos 2\theta_n = -1$ , 则  $\theta_n = \pi$

$$|\phi_{+0}(x=0)\rangle = -|g, 1\rangle, |\phi_{-0}(0)\rangle = |e, 0\rangle \tag{6.14}$$

这表明, 当一个激发态原子绝热地进入空腔 (电磁场为零) 时, 它会转化成  $|\phi_{-0}(x)\rangle$ , 这时, 它受到的有效势为  $V_{0-}(x) = \hbar\omega - \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + g^2(x)}$ , 这是一个势阱。就是说, 空腔在  $\delta > 0$  情况下会囚禁激发态的原子。而单光子的腔会排斥基态的原子, 其物理机制的分析与  $\delta < 0$  时完全类似。

上述关于微腔与原子相互作用的讨论, 依赖于绝热近似条件

$$\left| \frac{\langle \phi_{n+} | \dot{\phi}_{n-} \rangle}{V_{n+} - V_{n-}} \right| \sim \frac{1}{\delta^2} \left| \frac{dg(x)}{dx} v \right| \sqrt{n+1} \ll 1 \quad (6.15)$$

成立, 其中  $v$  是原子速度, 这个条件也可以表述为

$$\delta \gg \sqrt{\frac{g_0 \sqrt{n+1}}{T}} \quad (6.16)$$

其中  $g_0$  是  $g_x$  最大值,  $T$  是原子穿过微腔的时间, 通常取  $g_0 = 10^5 s^{-1}$ 。对于速度为每秒 1 米的原子, 是容易被满足的。

我们还可以在这个条件绝热近似的条件下, 计算微腔中原子的受力。

$$\begin{aligned} F_n &= -\langle \psi_n | \frac{\partial H}{\partial x} | \psi_n \rangle \\ &= -\langle \psi_n | \frac{\partial H_{JC}(x)}{\partial x} | \psi_n \rangle \end{aligned} \quad (6.17)$$

其中  $|\psi_n\rangle = e^{iE_n t} \phi_n(x) |\phi_{n\alpha}[x]\rangle$  是体系 BO 绝热近似波函数。根据费曼—海尔曼定理:

$$F_n = - \int \phi_n^*(x) \frac{\partial V_{n\alpha}(x)}{\partial x} \phi_n(x) dx \quad (6.18)$$

这个结果是原子光学研究的重要出发点。它表明, 处在不同绝热内态上原子, 将受到微腔不同的作用力, 它们会使得处在不同绝热内态叠加态上的原子产生分束效应, 这种分束效应通常被称为逆 Stern-Gerlach 实验。由于这些绝热内态代表原子和光场的缀饰态, 在微腔外部, 意味着不同的光子数态, 即处在不同数态上的腔与处在特定内态 ( $|e\rangle$  或  $|g\rangle$ ) 上原子相互作用, 会使原子分束。这与通常的 Stern-Gerlach 实验现象相似, 但机制形式相反。通常的 Stern-Gerlach 实验, 是指不同内态上的原子在相同的电磁场作用下会分束。

## §6.2 超冷原子的绝热操纵

在腔 QED 和量子光学方面, 量子绝热近似思想的另外一个应用是利用量子绝热迁移实现原子干涉仪和进行原子深度冷却。这个思想最早用于核磁

的研究，在原子物理中经历了各种各样发展。朱棣文小组 1994 年成功地利用了这个技术在铯原子气中实现 140 个光量子的绝热转移 [48], 从而相干地操纵原子的空间路径，使之分离和重聚，成功地完成了原子干涉仪的原理实验。

考虑一个  $\lambda$  型的三能级原子 (如图 8a), 应用极化耦合的方法把  $|1\rangle$  与  $|3\rangle$  及  $|2\rangle$  与  $|3\rangle$  用频率分别为  $\omega_1$  和  $\omega_2$ , 波矢分别为  $\mathbf{k}_1$  和  $\mathbf{k}_2$  的经典光耦合起来。如果这些光与原子系统共振, 则在相互作用表象中有哈密顿量

$$H = e^{-ik_1x}\Omega_1 |3\rangle\langle 1| + e^{-ik_2x}\Omega_2 |3\rangle\langle 2| + H.C \tag{6.19}$$

其中  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  是表征耦合强度的 Rabi 频率。对于极冷的原子, 我们可以忽略动量项的影响。对于固定的 Rabi 频率  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$ , 我们可以求解  $H$  的本征方程, 其基态的本征函数

$$|D, P\rangle = \cos\theta |1, P + \hbar k_1\rangle - \sin\theta |2, P + \hbar k_2\rangle \tag{6.20}$$

其中混合角  $\theta$  由 Rabi 频率  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  决定:

$$\text{tg}\theta = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \tag{6.21}$$

由于这个态与激发态  $|3\rangle$  解耦, 因此它不描写到  $|3\rangle$  态跃迁的吸收过程, 通常被称为暗态, 可以证明  $\langle 3 | D, P \rangle = 0$ 。

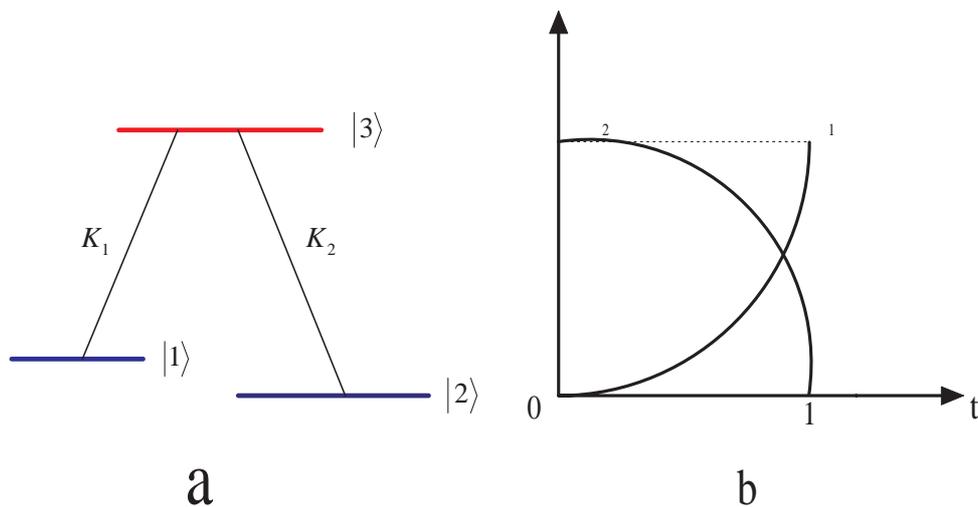


图 8: a.  $\lambda$  型的三能级原子 b. 光量子绝热迁移中  $\Omega_1$  与  $\Omega_2$  的变化

光量子绝热迁移的基本思想是人为地控制  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  的改变, 使得  $\Omega_1$  由零变到一个有限值,  $\Omega_2$  由一个有限值变到零。如果这种变化很缓慢, 不激发耦合系统本征态的跃迁, 原子将始终在瞬时的绝热本征态  $|D(t), P\rangle$  上。  $|D(t)\rangle$  的表达式与 (6.20) 相同, 但这里  $\theta = \theta(t)$  是随时间改变的。很明显,  $t=0$  时,  $\Omega_1 = 0$ 。这时  $\theta = 0$ , 绝热本征态为  $|D(0), P\rangle = |1, P + \hbar k_1\rangle$ 。在随后的演化过程中, 体系会保持在绝热的暗态上。当  $\Omega_2$  绝热地变为零时,  $\theta$  变为  $\frac{\pi}{2}$ , 这时, 体系状态将变为  $|2, P + \hbar k_2\rangle$ 。这就实现了质心动量的转移, 转移动量的大小为  $\Delta P = \hbar(K_2 - K_1)$ 。

这种技术还可以与腔 QED 结合起来, 实现腔中光子数的绝热迁移。为了这个目的, 只须把上述讨论中的一个光场 (如  $\Omega_2$ ) 换成腔场。把相互作用表象中的哈密顿量重新写为:

$$H_I = e^{-ik_1x}\Omega_1 a |3\rangle\langle 1| + e^{-ik_2x}\Omega_2 |3\rangle\langle 2| + H.c \quad (6.22)$$

不难看出, 对于给定的光子数  $n$ , 状态  $|n+1, 1, P + \hbar k_1\rangle, |n, 2, P + \hbar k_2\rangle, |n, 3, P\rangle$  张成了  $H_I$  的一个不变子空间  $V_n$ 。因此  $H_I$  按不同的  $n$  分成对角块。在子空间  $V_n$  上求解  $H_I$  的本征方程, 可以得到对应于零本征值的本征矢量:

$$|D_n(t)\rangle = \cos \theta_n(t) |n+1, 1, P + \hbar k_1\rangle - \sin \theta_n(t) |n, 2, P + \hbar k_2\rangle \quad (6.23)$$

其中  $\theta_n(t)$  由

$$\tan \theta_n(t) = \frac{\Omega_1 \sqrt{n+1}}{\Omega_2} \quad (6.24)$$

决定。因此, 当按着如上的方式绝热地操纵  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  时, 可以把光场原子的复合系统从状态  $|n+1, 1, P + \hbar k_1\rangle$  绝热地变成  $|n, 2, P + \hbar k_2\rangle$  或实现其逆过程。

总之, 用绝热操纵的办法, 可以改变腔中的光子数和原子的动量。特别是, 当操纵  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  使得  $\Omega_1 \sqrt{n+1} = \Omega_2$  则  $\theta_n = \frac{\pi}{4}$ , 我们得到一个最大纠缠态

$$|EPR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n+1, 1, P + \hbar k_1\rangle - |n, 2, P + \hbar k_2\rangle) \quad (6.25)$$

对于热原子而言, 其质心动量远远大于交换光子的动量, 我们得到了一个纠缠态

$$|EPR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n+1, 1\rangle + |n, 2\rangle) \quad (6.26)$$

最后指出，绝热操纵的办法是量子信息研究中一个十分重要的方法，它是产生不同类型粒子量子纠缠态的有效工具，最近，Haroch 小组利用类似方法产生了三粒子的纠缠态 GHZ 态 [49]。

## §7 绝热量子纠缠在量子测量和量子退相干问题中的应用

量子力学测量问题是由来已久的，自量子力学建立以来关于量子力学基本问题的一系列争论均与量子测量问题密切相关。所谓的量子测量问题是指：在测量过程中，为什么信息的提取会引起波函数不可逆的改变一波包塌缩？塌缩的结果使得波函数描述的量子相干性大大地减少，发生所谓的量子退相干。从双缝实验看，这种退相干意味着“Which-Way”信息探测导致双缝实验中干涉条纹的消失。

玻尔对这种退相干现象的解释是依据他的互补原理：物质具有波动和粒子二重属性，但在同一个实验中，二者互相排斥，不能同时出现。双缝实验中断定粒子走哪一个缝的测量强调了粒子性的一面（粒子是空间定域的），波动性（波在空间上是广延的）就被排斥了，从而没有干涉条纹。为了使问题具体化，海森堡提出了玻尔不甚同意的阐释：探测位置的测量扰动了粒子的动量，从而破坏了干涉条缝。最近的实验证实了海森堡的这种观点是不尽正确的。Rempe 小组的实验 [50] 结果表明，通过冷原子的内态标记原子路径，而不对它动量产生影响，干涉条纹还是消失了。其他的几个实验也表明了相同的观点，这就是：量子测量相当于形成仪器和被测系统之间的纠缠态（如用内态标记空间态）。

### §7.1 绝热量子纠缠 [51 - 54]

如果用  $|n\rangle$  代表被测系统的待测状态，用  $|D_n\rangle$  代表仪器状态，仪器与系统间适当的相互作用有可能导致一个量子纠缠态

$$|\psi_f\rangle = \sum_{n=1} C_n |n\rangle \otimes |D_n\rangle \quad (7.1)$$

的形成。如果能够很好地区分仪器的状态，则  $\langle D_n | D_m \rangle = \delta_{mn}$ ，即仪器态互相正交，我们便能从仪器的态  $|D_n\rangle$  完整地“读出”系统的状态。这时，系统的

干涉条纹决定于空间的几率密度分布

$$\begin{aligned} I(x) &= \langle x | \text{Tr}_D(|\psi_f\rangle\langle\psi_f|) | x \rangle \\ &= \sum_n |C_n|^2 I_n(x) + \sum_{m \neq n} C_n C_m^* \langle x | n \rangle \langle m | x \rangle \langle D_m | D_n \rangle \end{aligned} \quad (7.2)$$

的交叉项  $\sum_{m \neq n} C_n C_m^* \langle x | n \rangle \langle m | x \rangle \langle D_m | D_n \rangle$ 。当仪器状态是正交的，干涉条纹就消失了

$$I(x) \rightarrow \sum_n |C_n|^2 I_n(x) \quad (7.3)$$

其中  $I_n(x) = \langle x | \psi \rangle \langle \psi | x \rangle$  是单态的几率密度。

现在的问题有二：（一）在什么情况下，体系和仪器的相互作用会形成如（7.1）所示的量子纠缠态？（二）在什么条件下，仪器的态是互相正交的？对于后者，包括本文作者在内，许多作者得到了比较明确的答案。这就是，仪器是由许多粒子组成的， $|D_n\rangle$  可以因子化 [51-52] 为

$$|D_n\rangle = \prod_{j=1}^N |D_n(j)\rangle \quad (7.4)$$

当  $N \rightarrow \infty$  时，作为许多模小于因子乘积

$$\langle D_n | D_m \rangle = \prod_{j=1}^N \langle D_n(j) | D_m(j) \rangle \quad (7.5)$$

在很多情况下都会趋近于零。然而，第一个问题的答案却不是显而易见的。

在量子力学测量模型的研究中，人们通常是采用特别选择相互作用来产生这样纠缠态，其结论通常不具有普遍性。我们希望看到的结果是，一般形式的相互作用可能在某种合理的物理条件下产生这样纠缠态。本文作者之一（孙昌璞）及其合作者最近探讨了解决这种量子退相干问题可能答案 [53,54]：由于仪器宏观经典属性，它可以与被测系统绝热地进行分离。通过 BO 近似，一般形式的相互作用支配的系统 + 仪器演化会自然产生仪器状态和系统状态的量子纠缠，从而导致量子测量。

考虑被测量子系统  $S$  与测量仪器  $D$  相互作用的量子动力学。设  $q$  是  $S$  的动力学变量， $x$  是  $D$  的动力学变量，它们的自由哈密顿量分别为  $H_s(q)$  和  $H_E(x)$ ，它们之间的相互作用  $H_I = H_I(x, q)$  描述。为了应用 BO 量子绝热近似分离动

力学变量  $x$  与  $q$ , 我们计算  $x$  固定时, 系统  $S$  的本征方程:

$$[H_s(q) + H_I(x, q)] |n[x]\rangle = V_n(x) |n[x]\rangle \quad (7.6)$$

由此得到被  $x$  参数化的本征值  $V_n(x)$  和相应的本征函数  $|n[x]\rangle$ 。这时, 通过 BO 量子绝热近似,

$$H = H_s(q) + H_I(x, q) + H_E(x) \quad (7.7)$$

的本征函数可以写成部分因子化的形式, 它在坐标表象中的表达式为

$$\langle x | \psi_{n\alpha} \rangle = \phi_{n\alpha}(x) |n[x]\rangle \quad (7.8)$$

其中  $\phi_{n\alpha}(x)$  是有效本征方程

$$H_n(x)\phi_{n\alpha}(x) = \omega_{n\alpha}\phi_{n\alpha}(x) \quad (7.9)$$

的一个解。对于每个给定的  $n$ , 对不同  $\alpha$ , 的给出有效哈密顿量

$$H_n(x) = \frac{1}{2M}(P - A_n(x))^2 + V_n(x) \quad (7.10)$$

(此处已令  $\hbar=1$ ) 的一组完备的本征基矢  $\phi_{n\alpha}$ 。这里,  $V_n(x)$  和  $A_n(x) = i\langle n(x) | \nabla_x n(x) \rangle$  分别是 BO 近似中的诱导标量势和诱导矢量矢。

从直观的物理图象看, 部分因子化的本征态意味着, 一旦系统  $S$  处在一个给定的状态  $|n(x)\rangle$  上, 则测量仪器必经历一个相对应的有效相互作用。在经典的图景中, 它可以用罗伦兹力公式

$$F_n = -\nabla_x V_n(x) + \frac{d}{dt}x \times (\nabla_x \times A_n) \quad (7.11)$$

描述。这就是说, 处在不同  $|n\rangle$  态上的系统会使仪器受到不同“作用力”  $F_n$ , 从而产生系统和仪器之间的量子纠缠, 实现量子测量。

现在, 从大系统(由仪器和被测系统构成)时间演化的观点, 可以准确地描述上述纠缠的形成。假设大系统在  $t=0$  时刻处于一个准因子化的状态  $|\psi(0)\rangle$  上,

$$\langle x | \psi(0) \rangle = (\sum C_n |n[x]\rangle) \otimes \phi(x) \quad (7.12)$$

其中  $C_n$  是系统初态  $|\psi_S(0)\rangle = \sum C_n |n[x]\rangle$  的相干叠加系数。为了计算大系统的时间演化, 要应用完备性关系

$$\sum_{n,\alpha} |\psi_{n\alpha}\rangle \langle \psi_{n\alpha}| = 1 \quad (7.13)$$

在坐标表象中的表达式

$$\sum_{n,\alpha} \int dx dx' \phi_{n\alpha}^*(x') \phi_{n\alpha}(x) |x\rangle \langle x'| \otimes |n[x]\rangle \langle n[x]| = 1 \quad (7.14)$$

这个关系等价于

$$\sum_n |x\rangle \langle x| \otimes |n[x]\rangle \langle n[x]| = |x\rangle \langle x| \quad (7.15)$$

$$\sum_\alpha |\phi_{n\alpha}\rangle \langle \phi_{n\alpha}| = 1 \quad (7.16)$$

应用上述完备性关系，计算大体系波函数的时间演化得到

$$\begin{aligned} \langle x | \psi(t) \rangle &\equiv \psi(x, t) = \sum_{n,\alpha} C_n \langle \phi_{n\alpha} | \phi \rangle e^{-i\omega_{n\alpha} t} |n\rangle \otimes \phi_{n\alpha}(x) \\ &= \sum_n C_n |n(x)\rangle \langle x | D_n(t) \rangle \end{aligned} \quad (7.17)$$

其中

$$|D_n(t)\rangle = e^{-iH_n t} | \phi \rangle \quad (7.18)$$

代表绝热分离变量后，仪器初态在 BO 近似有效哈密顿作用下的时间演化。因此，我们得到了典型的量子纠缠态  $|\psi(t)\rangle$ 。

需要指出的是，大系统的初态 (7.12) 不是严格意义下的因子化态：一组不依赖于  $x$  的系数，意味着存在  $x$  变量的部分纠缠。但对系统绝热自由度而言，它是形式因子化的。现在，考虑一个完全因子化的初态

$$|\psi(0)\rangle = |x\rangle \otimes |\phi\rangle \quad (7.19)$$

其中  $|x\rangle$  是系统的“坐标”本征态，则能得到  $t$  时刻的波函数

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \langle n[x] | \phi \rangle \int dx' K(x', x, t) |x'\rangle \otimes |n[x']\rangle \quad (7.20)$$

其中

$$K(x', x, t) = \langle x' | e^{-iH_n t} |x\rangle \quad (7.21)$$

是量子绝热传播子。通常情况下，在坐标表象中它不是对角化的。然而，如果把仪器想象成一个大质量的宏观物体，质量  $M$  是一个很大的量。这时可以证明

$$k(x', x, t) \propto \delta(x - x') \quad (7.22)$$

事实上, 当  $M$  很大,  $\frac{1}{M}$  是一个小量

$$\begin{aligned} e^{-iHnt} &= e^{-iV_n t} \left[ 1 - i \int_0^t e^{iV_n t'} \frac{P^2}{2M} e^{-iV_n t'} dt' + \dots \right] \\ &= e^{-iV_n t} \left[ 1 - i \frac{P^2 t}{2M} + i \frac{t^2}{4M} (P \partial_x V_n + [\partial_x V_n] P) - \frac{it^2 \partial_x V_n^2}{6M} + \dots \right] \end{aligned} \quad (7.23)$$

这里使用了微扰展开技术, 将动能  $\frac{P^2}{2M}$  视为微扰, 并注意到  $\int \langle x' | P^n | x \rangle dx = 0$  ( $n=1,2,\dots$ ), 我们便在  $M \rightarrow \infty$  情况下得到

$$K(x', x, t) \approx e^{-iV_n(x)t} \delta(x - x') \quad (7.24)$$

这时, 有量子纠缠态

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \langle n[x] | \phi \rangle e^{-iHnt} |x\rangle \otimes |n[x]\rangle \quad (7.25)$$

对于这个特例我们的确在大质量经典极限下得到从完全因子化态到纠缠态的演化。这个结论可以推广到系统的初态是任意相干叠加态的普遍情况。

我们还须要指出的是, 对任意给定的因子化初态

$$|\psi(0)\rangle = \sum C_k |S_k\rangle \otimes |\phi\rangle \quad (7.26)$$

相互作用总可以把它变成一个广义的量子纠缠态

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{m,n} C_{mn} |x_m\rangle \otimes |y_n\rangle \quad (7.27)$$

其中  $|x_m\rangle$  和  $|y_n\rangle$  分别为系统和仪器的完全正交基矢。根据 Schmit 定理 [1], 这个双重和表达式可以唯一的化简为单重和表达式

$$|\psi(t)\rangle = \sum \lambda_\alpha |Z_\alpha\rangle \otimes |A_\alpha\rangle \quad (7.28)$$

其中  $|Z_\alpha\rangle$  是系统的新的正交基矢,  $|A_\alpha\rangle$  是仪器与之相对应的正交矢量。但这并不意味着实现了量子测量, 因为基矢  $|Z_\alpha\rangle$  已不是系统的待测状态  $|S_n\rangle$ 。因此, 一般相互作用在一般条件下不会产生具有量子测量意义的量子纠缠。但是, 这段简明的讨论告诉我们, 相互作用可以导致系统退相干的发生, 给定系统的量子叠加态  $|\psi\rangle = \sum C_k |S_k\rangle$  它会退相干到一个完全混合的状态

$$\begin{aligned} \rho &= Tr_D(|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|) \\ &= \sum |\lambda_\alpha|^2 |Z_\alpha\rangle \langle Z_\alpha| \end{aligned} \quad (7.29)$$

其中  $Tr_D$  代表对仪器的状态求迹, 物理上意味着我们仅对系统的状况感兴趣, 而不管仪器内部情况如何。

### §7.2 理想测量与仪器的经典性

本节讨论的第二部分, 我们要进而考察在什么情况下, 这种量子绝热纠缠是理想的, 形成理想的量子测量。也就是说, 仪器状态是互相正交的。为了简单起见, 我们先不考虑几何相因子或诱导规范场的影响。我们将要说明, 如果由绝热近似有效哈密顿量描述的仪器的有效运动是经典的, 则重叠积分 (或积退相干因子)

$$F_{mn} = \langle D_m(t) | D_n(t) \rangle \quad (7.30)$$

是零。

为此, 我们先讨论什么是仪器的准经典态, 根据 Landau 和 Lifshitz 的观点, 一个接近于经典的态实质上是一个波包  $|\psi\rangle = \sum C_n |n\rangle$ 。其中非零的系数  $C_n$  只是取在一个大量子数  $\tilde{n}$  的附近。量子力学的对应原理要求当  $\tilde{n} \rightarrow \infty, \hbar \rightarrow 0$  时  $n\hbar$  趋近一个有限的作用量。在这种情况下可以证明, 一个可观察量的对于这种态的平均值, 正好是其经典变量的付里页级数。对于这种态而言, 其位置算符的平均值正好是其经典轨道, 且位置算符的方均根涨落是零。这样的量子态就是一个最接近经典的状态——准经典态。谐振子系统的相干态, 在平均粒子数很大的情况下, 就是一个准经典态。如果  $|D_n(t)\rangle$  是这样一个准经典态, 位置算符的均方根涨落为零意味着它是坐标空间一个宽度很小的波包, 这时, 对于不同  $n$ , 不同  $|D_n(t)\rangle$  的重叠积分会趋向于零。

的确, 对于大质量的仪器而言, 我们可以考虑在经典轨道  $x = 0$  附近的运动涨落。这时

$$V_n(x) \simeq V_n(0) + F_n x \quad (7.31)$$

从而, 由

$$|D_n(t)\rangle \simeq e^{-iV_n(x)t} |\phi(x)\rangle \quad (7.32)$$

得到

$$F_{mn} = \langle \phi | e^{-i(F_n - F_m)x t} | \phi \rangle \quad (7.33)$$

当仪器的初态是一个高斯波包

$$\langle x | \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2 x^2 / 2} \quad (7.34)$$

则

$$F_{mn} = e^{-\frac{(F_m - F_n)^2}{4\sigma^2} t^2}$$

当仪器初态是一个很窄的波包， $\sigma$  很大， $F_{nm}$  是一个递减很快的函数。于是，通过量子绝热近似，我们实现了一个理想的量子测量。

由于忽略了动量的影响，上述讨论还略显粗糙。为此，要对  $M$  有限的情况，讨论经典轨道  $x_0 = x_c(t)$  附近运动。在海森堡表象中，对于初态  $|\phi\rangle$ ，定义经典轨道

$$x_c = \langle \phi | x(t) | \phi \rangle, P_c = \langle \phi | P(t) | \phi \rangle \quad (7.35)$$

和其附近的量子涨落

$$\xi = x - x_c, P_\xi = P - P_c \quad (7.36)$$

这时，绝热近似的诱导标量势  $V_n(x)$  可以展为

$$V_n(x) \simeq V_n(x_c) + V'_n(x_c)\xi + \frac{1}{2}V''_n(x_c)\xi^2 \quad (7.37)$$

于是，有近似的海森堡方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P/M \\ \dot{P} &= -V'_n(x_c) - V''_n(x_c)\xi \end{aligned} \quad (7.38)$$

和爱仑菲斯特方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= P_c/M \\ \dot{P}_c &= -V'(x_c) \end{aligned} \quad (7.39)$$

现在可以把问题的讨论转移到薛定谔表象，设  $|\varphi(t)\rangle$  是  $H_n$  的薛定谔方程的解，则不难证明，在以  $x_c(t)$  为参考点的非惯性系中粒子波函数（以  $\xi$  为位置坐标）为

$$|\phi(t)\rangle = \exp[i[\theta(t) + x_c P_\xi - P_c \xi]] |\varphi(t)\rangle \quad (7.40)$$

这里  $e^{ix_c P_\xi}, e^{iP_c \xi}$  为位置、动量平移算符。 $|\phi(t)\rangle$  满足等效的薛定谔方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = \left( \frac{P_\xi^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega_t^2 \xi^2 \right) |\phi(t)\rangle \quad (7.41)$$

其中  $\dot{\theta}_t = \frac{P_c^2}{2M} + V(x_c)$ ,  $M\omega_t^2 = V''(x_c)$  均为时间相关的函数。这个结果代表了系统沿经典轨道  $x_c(t)$  的非惯系中粒子运动，它是一个具有时间相关频率的谐振子 (图 9)。

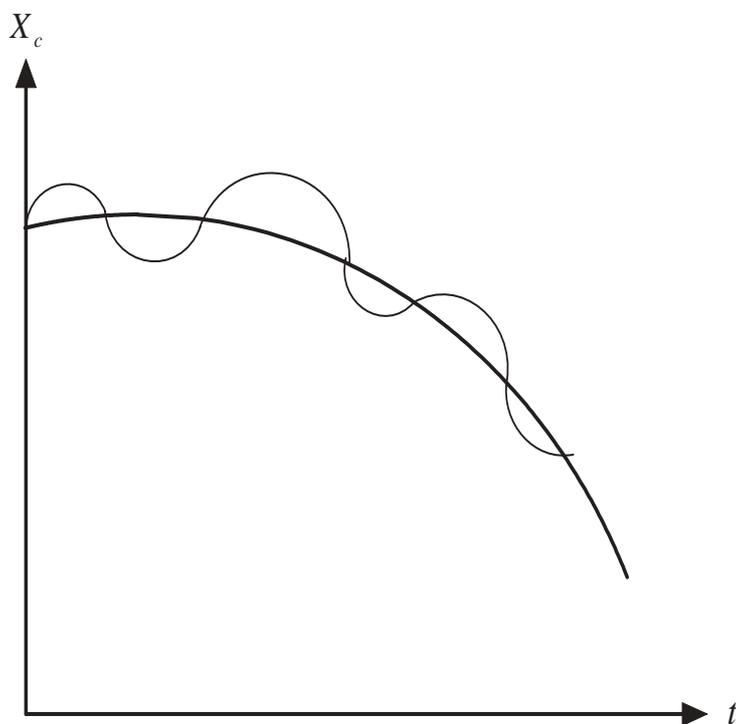


图 9: 有量子涨落的经典轨道

许多著作曾从路径积分的观点描述过这种半经典图象。对于给定的时间，这种经典轨道附近进行的量子涨落大小可以由谐振子的瞬时基态宽度  $W_n = \sqrt{2m\omega t/\hbar}$  表征。对于不同  $V_n(t)$ , 重叠积分  $F_{nm} = \langle D_n(t) | D_m(t) \rangle$  是否为零取决于基态宽度和  $S_{mn} = w_m + w_n$  与经典轨迹距离差  $|x_{nc}(t) - x_m(t)|$  的大小比较。如果

$$S_{mn} \gg |x_{nc}(t) - x_m(t)| \quad (7.42)$$

则  $\langle D_n(t) | D_m(t) \rangle \rightarrow 0$ 。由此看到，一个经典仪器的存在是实现理想量子测量的必要条件。

### §7.3 简单例子

最后我们讨论绝热量子测量的一个典型例子，以说明上述基本观点。我们的模型仍然是一个自旋为 1/2 的粒子在空间非均匀磁场中的运动。 $|u_+(\vec{B})\rangle$  和

$|u_-(\vec{B})\rangle$  是其固定  $x$  点时本征函数,  $V_{\pm}(x) = \pm\mu B(x)$  是其本征值, 它提供了绝热近似有效哈密顿量

$$H_{\pm} = \frac{1}{2M}(-i\partial_x - A_{\pm})^2 + V_{\pm}(x) \quad (7.43)$$

中的标量势, 而

$$A_{\pm} = \frac{K}{2}(1 \pm \cos \theta) \quad (7.44)$$

提供了联系于 Berry 几何相因子的矢量势。我们取磁场为

$$\vec{B} = B(x)\vec{n}(x) \quad (7.45)$$

$$\vec{n}(x) = (\sin \theta, \cos Kx, \sin \theta \sin Kx, \cos \theta) \quad (7.46)$$

这恰好是 Bitter-Dibert 实验所要求的。这时, 如果取空间的初态为一个高斯波包

$$|\phi\rangle = \left(\frac{1}{2\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \int dx e^{-\frac{x^2}{4a^2}} |x\rangle \quad (7.47)$$

而对给定的空间点  $x$ , 自旋部分为一个相干叠加态

$$|s\rangle = C_1 |u_+(B(x))\rangle + C_2 |u_-(B(x))\rangle \quad (7.48)$$

如果在  $x = 0$  附近展开  $B(x) = fx$ , 可以得到  $t$  时刻的波函数

$$|\psi(t)\rangle = C_1 |u_+(x)\rangle \otimes |D_+(t)\rangle + C_2 |u_-(B)\rangle \otimes |D_-(t)\rangle \quad (7.49)$$

其中, 不难计算

$$\langle x | D_{\pm}(t)\rangle = \left(\frac{a^2}{2\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\pi}{a^2 + \frac{it}{2M}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\Omega_{\pm}(t) \mp iftx} \times \exp\left[-\frac{(x - x_{tc}(t))}{4(a^2 + \frac{it}{2M})}\right] \quad (7.50)$$

这里  $\Omega_{\pm}(t) = \frac{f^2 t^3}{4M} + \frac{1}{2} f t^2 A_{\pm}$ 。很明显, 通过相互作用, 空间部分的高斯波包正好分裂成两个高斯波包, 它们的中心

$$x_{tc}(t) = \mp \frac{1}{2} \frac{f}{M} t^2 - \frac{A_{\pm}}{M} t \quad (7.51)$$

代表质量为  $M$  粒子在外力  $\mp f$  和诱导电磁势  $A_{\pm}$  驱动下的经典运动。其量子涨落主要表现在波包宽度

$$a(t) = a \sqrt{1 + \frac{t^2}{4M^2 a^2}} \quad (7.52)$$

的无限扩散。这时，不难计算出退相干因子

$$\begin{aligned} \langle D_+(t) | D_-(t) \rangle &= F(t) \\ &= \exp \left[ -a^2 f^2 t^2 - \frac{1}{4a^2} \left( \frac{f}{M} t^2 - \frac{k \cos \theta}{M} t \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.53)$$

这表明，时间  $t \rightarrow \infty$  时，理想的量子测量会自动出现，其特征时间  $\tau_d = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}Ma}{f}}$  代表  $F(t)$  变成初值  $e^{-1}$  倍时所需的时间。

最后指出，被测系统和测量仪器绝热变量分离导致量子纠缠的基本思想可以用来解释薛定谔猫佯谬。由于薛定谔猫是一个宏观物体，它必定是由许多微观粒子组成的，描述猫的死态和活态的特征是通常可理解为体系的集体自由度。在外场中，必定有猫的内部自由度与集体自由度的耦合，这种耦合在绝热近似条件下可以产生猫的内部状态与集体状态的量子纠缠。这时“死态”和“活态”将于不同的内部态相关联，即

$$|CAT\rangle = C_1 |dead\rangle \otimes |D\rangle + C_2 |living\rangle \otimes |L\rangle \quad (7.54)$$

内部态对猫的死活进行客观的量子测量，使得猫的“死活”不再具有量子相干性，而只是一个象天气预报一样的经典概率事件。即猫的“生死”可描述为约化密度矩阵

$$\rho_{CAT} = Tr_{interior}(|CAT\rangle \langle CAT|) = |C_1|^2 |dead\rangle \langle dead| + |C_2|^2 |living\rangle \langle living| \quad (7.55)$$

这个讨论是相当定性的，但其中心思想基本是明确的。其关键是应 BO 量子绝热近似。

## §8 小结和评注

本文结合 Berry 几何相因子的观念，比较系统的介绍了量子绝热近似理论的历史发展和最新应用。从这些讨论可以看出，虽然自 1928 年以来，量子绝热近似基本方法的建立已有七十多年的历史，但它至今仍然具有极大的生命力，这主要是由于：一方面，有像 Berry 几何相因子这样崭新观念的注入使其本身不断得到推广和修正；另一方面，它的应用领域又不断扩大，显示出这种方法本身的实用性。例如，本文作者之一（孙昌璞）曾利用这种方法研究了

介质中太阳中微子震荡的共振效应，特别讨论了极不均匀介质引起的非绝热效应 [56-57]。另外还要指出的是，这种基本方法在深层次上还具有与其他重要近似方法（如旋转波近似，二能级近似乃至微扰论）所共有的本质，使得我们可以引申出更普适方法——快变因子消除近似。

最后要提到的是，从数学角度看，绝热近似方法及其推广——高阶量子绝热近似方法，可以抽象为缓变系数线性微分方程组的近似求解方法。因此，几何相因子的概念将会出现于各种线性系统中，而绝不局限于满足薛定谔方程的量子系统，从而可以提出不同于 Hannay 角 [58-59] 的经典 Berry 几何相因子的概念 [60-61]。类似的概念早在 Berry 几何相因子发现之前就被人们在研究几何光学时涉及过。利用这样的观念，Berry 本人在研究了光纤中光场极化方向扭转问题 [61]，直观的解释了的光纤实验 [62]。我们的工作也初步显示了在经典力学系统中演示几何相因子效应的可能性 [63]。

## 附录 A 量子力学中的流形和纤维丛概念

本附录的目的有二：一是以简洁易懂的方式，向尚不熟知现代微分几何的读者简单介绍什么是微分流形和纤维丛；二是以典型的例子向读者表明，流形和纤维丛的概念是深入理解量子力学必不可少的。本附录的内容深入理解正文所必须的，但这里不拟采用严格的数学证明。

考虑一个自旋为  $1/2$  的粒子在缓变磁场  $B(t)$  中进动，其有效哈密顿量为

$$H[\vec{B}] = -\mu \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (\text{A.1})$$

其中  $\vec{\sigma}$  是 Pauli 矩阵， $\mu$  是耦合系数，对于给定  $\vec{B}$  的大小， $|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ 。参数空间  $\{\vec{B} \mid |\vec{B}| = B\}$  相当于  $R^3$  中的二维球面  $S^2$ 。由于  $S^2$  的拓扑是非平凡的，我们不能整体地引进它的坐标，相应地描述它的波函数也不能由一个坐标系整体地写出。从而，为了描述波函数的整体特征，必须引入二维复向量丛的观念： $\hat{H}[\vec{B}]$  的瞬时本征态  $|\psi(\vec{B})\rangle$  可取为纤维截面的局部基。

首先考虑其底空间  $S^2$  的微分流形结构。对于球面  $S^2$  而言，我们通常选择球坐标  $(\theta, \varphi)$  ( $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) 来描述  $S^2$  上的点  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$

$$B_x = B \sin \theta \cos \varphi \quad (\text{A.2})$$

$$B_y = B \sin \theta \sin \varphi \quad (\text{A.3})$$

$$B_z = B \cos \theta \quad (\text{A.4})$$

然而，从整体的角度说，这种描述是有缺点的， $S^2$  的南极  $S = (0, 0, -1)$  和北极  $N = A\#(0, 0, 1 A\#)$  分别对应于  $\theta = \pi$  和  $\theta = 0$ ，这时， $\varphi$  是不确定的。这样，用  $(\theta, \varphi)$  还不足以描述整个  $S^2$ ，因为点和坐标间的 1-1 对应性质不能整体地成立。

为了克服上述缺点，我们使用坐标邻域（或称坐标图）的方式，消除这些不确定性。（为了方便以下令  $B = 1$ ）取  $S^2$  的两个开集

$$U_S = S^2 \setminus \{S\} = \{(\theta, \varphi) \mid 0 \leq \theta < \pi\} \quad (\text{A.5})$$

$$U_N = S^2 \setminus \{N\} = \{(\theta, \varphi) \mid 0 < \theta \leq \pi\} \quad (\text{A.6})$$

若点  $P = (\theta, \varphi) \in U_S$ , 它关于南极  $S$  的球极投影 (如图 10)

$$z = tg \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \equiv u_S^1 + iu_S^2 \quad (\text{A.7})$$

是  $S^2 \setminus \{S\}$  到复平面  $C^1$  的 1-1 对应, 其中  $u_S^1, u_S^2 \in R, 0 \leq \theta < \pi$ 。若  $P = (\theta, \varphi) \in U_N$ , 它关于北极  $N$  的球极投影是

$$w = ctg \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \equiv u_N^1 + iu_N^2 \quad (\text{A.8})$$

其中  $0 < \theta \leq \pi$ 。若选  $z = u_S^1 + iu_S^2$  和  $w = u_N^1 + iu_N^2$  分别作为开集  $U_S$  和  $U_N$  的局部坐标, 则分别把  $U_S$  和  $U_N$  与复平面  $C^1$  1-1 对应起来。在  $U_S \cap U_N = \{(\theta, \varphi) \mid 0 < \theta < \pi\}$  上, 局部坐标  $w$  和  $z$  间的变换关系为

$$z = \frac{1}{|w|^2} w \quad (\text{A.9})$$

或

$$(u_S^1, u_S^2) = \left( \frac{u_N^1}{(u_N^1)^2 + (u_N^2)^2}, \frac{u_N^2}{(u_N^1)^2 + (u_N^2)^2} \right) \quad (\text{A.10})$$

其中, 已经利用了由 (A.8) 得到的  $|w|^2 = ctg^2 \frac{\theta}{2} = (u_N^1)^2 + (u_N^2)^2$ 。可见在  $U_S \cap U_N$  上,  $w$  和  $z$  间的转换函数是无穷可微的, 于是通过相对覆盖  $S^2$  的领域  $U_S$  和  $U_N$  引入局部坐标, 并使得在不同坐标邻域  $U_S$  和  $U_N$  的交叠区上, 它们由无穷可微的函数 (A.9), (A.10) 相联系。这样, 便赋予了  $S^2$  一个坐标邻域结构, 即  $S^2$  由两个坐标领域  $U_S$  和  $U_N$  复叠, 在  $U_S \cap U_N$  中, 两个坐标之间由可微分的变换相联系。

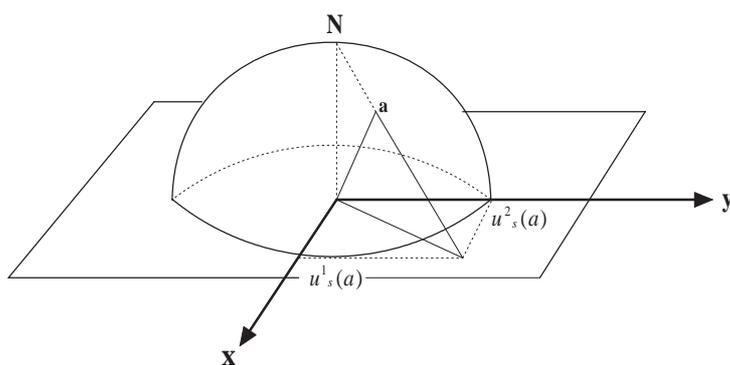


图 10:  $S^2$  的球极投影

总之，由于上述的参数空间整体上拓扑非平凡，不能统一地用一套局域坐标来描述，正确的刻画必须采用两个或两上以上的坐标复盖，复盖之间重叠部分需要可微的变换来联系，这样就形成了一个微分流形。这些讨论表明，量子体系哈密顿量的参数空间可能是非平凡的，这种非平凡会使得系统的波函数具有非平凡的拓扑结构，从而就必须要在量子力学中引入纤维丛的观念。

纤维丛是函数或直积流形概念的推广。例如，直积流形  $M \times R = \{(x, a) \mid x \in M, a \in R\}$  中  $M$  是  $M \times R$  的底流形，而  $M$  上一点  $x$  上的纤维是  $(x, R)$ 。  $M \times R$  到  $M$  有一个投影： $\pi: M \times R \rightarrow M$  使  $(x, a) \rightarrow x$ ， $M$  上的函数  $f: M \rightarrow R(x \rightarrow f(x))$  的图象可视为  $M$  到  $M \times R$  一个映射，通常称  $f$  为纤维丛一个截面，这种平凡丛的讨论可推广到非平凡情况。

以上量子力学的例子就是非平凡丛。在这个例子中，底流形是参数空间  $S^2, S^2$  上一点  $\vec{B}$  的纤维即是以  $\varepsilon_+(\vec{B})$  或  $\varepsilon_-(\vec{B})$  为本征值的所有本征矢量之集合。显然，由于它们只相差一个相因子，故约定一组基后这根纤维将成为复投影空间  $C^1$ 。若点在坐标域  $U_\alpha$  与  $U_\beta$  的交叠区中，则对每个坐标域，为  $\vec{B}$  的纤维可以约定一个基  $|\psi(\vec{B})\rangle_{U_{\alpha(\beta)}}$ 。按以上的讨论，引入  $U_S$  和  $U_N$  作为  $S^2$  的坐标邻域， $U_S = S^2 \setminus \{S\}$  和  $U_N = S^2 \setminus \{N\}$ ，（ $S, N$  分别是南极和北极），在  $U_S$  上，对应于本征值  $\varepsilon_+ = -\mu B$  和  $\varepsilon_- = \mu B$  的瞬时本征函数分别为

$$|\psi_+(\vec{B})\rangle_{U_S} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$|\psi_-(\vec{B})\rangle_{U_S} = \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

此即  $U_S$  上个点纤维的基矢。这样规定的原因是，在  $U_S$  上  $\theta = 0$  时， $\phi$  值不确定，为保证  $|\psi_\pm(\vec{B})\rangle$  在参数空间的单值性，必须采用正确的局域坐标表示  $|\psi_\pm(\vec{B})\rangle$  使之在  $\theta = 0$  时与  $\phi$  无关。同样，在  $U_N$  上有

$$|\psi_+(\vec{B})\rangle_{U_N} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$|\psi_-(\vec{B})\rangle_{U_N} = \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

这些波函数定义  $S^2$  上的非平凡线丛。

不难看出, (A.11) 和 (A.12) 分别在  $U_S$  和  $U_N$  上是确定的参照于这一组基, 不同纤维表示之间有可微的么正变换相联系。

$$g_{12} = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

在  $U_S$  和  $U_N$  上, 粒子的任何一个状态可表达为

$$|\psi\rangle = a |\psi_+(\vec{B})\rangle_{U_S} + b |\psi_-(\vec{B})\rangle_{U_S} \quad (\text{A.16})$$

或

$$|\psi\rangle = a' |\psi_+(\vec{B})\rangle_{U_N} + b' |\psi_-(\vec{B})\rangle_{U_N} \quad (\text{A.17})$$

在  $U_S \cap U_N$  上, 纤维丛的局域坐标间的变换关系为

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = g_{12} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

以上讨论表明, 在量子力学中引入微分流形和纤维丛的观念是十分自然, Berry 相因子的研究进一步表明纤维丛上平行移动和乐群的概念会对应着量子力学中的可观察效应。我们先从  $R^3$  中平行移动或水平提升的观念入手, 并讨论这些概念在量子力学中的应用。

考虑一个单位球面  $S^2$  上切矢量的平行移动 (图 11)。我们可以把球面一点  $A$  上的切矢是空间视为以  $S^2$  为底的纤维丛的纤维。设单位球上过点  $A$  有一个切矢量  $\vec{e}$ ,  $\vec{r}$  是过  $A$  点的径向矢量。显然  $\vec{r} \cdot \vec{e} = 0$ 。所谓的平行移动是要求: (1) 在移动  $\vec{e} = \vec{e}(t)$  时, 保持它始终与  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  正交; (2) 包含  $\vec{e}$  和  $\vec{r}$  的坐标系不扭曲。第二个条件由  $\vec{r} \cdot \vec{\Omega} = 0$  自动保证, 其中  $\vec{\Omega} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$  是  $A$  点移动的角速度。条件 (1) 可以写为

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{e}) = 0 \quad (\text{A.19})$$

或者

$$\dot{\vec{e}} \cdot \vec{r} = -\dot{\vec{r}} \cdot \vec{e} \quad (\text{A.20})$$

由于

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} \times \vec{e} &= (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{e} \\ &= (\vec{r} \cdot \vec{e}) \cdot \dot{\vec{r}} - (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{e}) \cdot \vec{r} \\ &= -(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{e}) \vec{r}\end{aligned}\quad (\text{A.21})$$

则平移定律

$$\dot{\vec{e}} = \vec{\Omega} \times \vec{e} \quad (\text{A.22})$$

是 (A.19) 成立的充分条件。如果定义复矢量  $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e} + i\vec{r} \times \vec{e})$ , 则平移定律 (A.22) 可表达为

$$\text{Im}(\psi^* \dot{\psi}) = 0 \quad (\text{A.23})$$

其中  $u = \vec{r} \times \vec{e}$  是与  $\vec{r}, \vec{e}$  构成正交坐标系的单位矢量, 它处在切平面内。与这种情况类比, 可把 Hermit 丛波截面相关的平行移动一般地定义为

$$\text{Im}\langle \psi | d\psi \rangle = 0 \quad (\text{A.24})$$

当切矢量以这种方式沿底流形上一个闭合路径移动时, 回到出发点时, 将会改变原来的方向, 与原来相差一个交换, 这此变换将构成所谓的和乐群。

一般的说来我们可以把底流形上的曲线  $C(t)$  提升到丛流形上, 即在丛流形上找一条曲线  $F(t)$  满足  $\forall t, \pi[F(t)] = C(t)$  当确定一些提升规则 (联络) 和初始提升点时, 这种提升将是唯一的。当  $C(t)$  封闭时, 在某些规则下, 提升后得到的  $F(t)$  在起点与终点取值可能会有所不同,

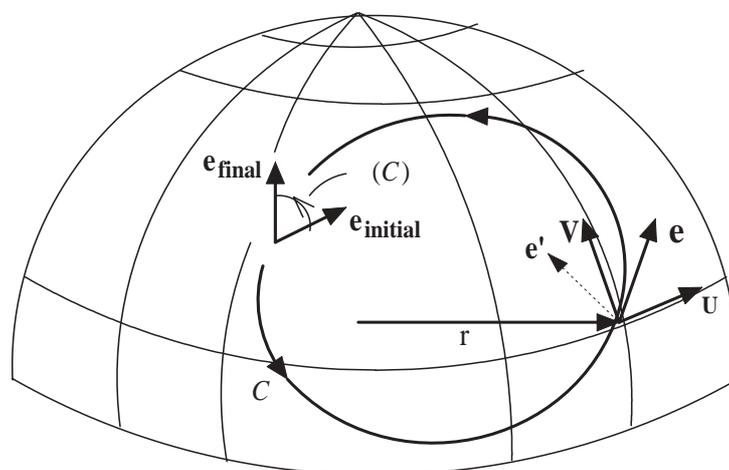
$$F(0) \neq F(0+T) \quad (\text{A.25})$$

但

$$\pi[F(0)] = C(0) = C(T) = \pi[F(0+T)] \quad (\text{A.26})$$

$F(t_0)$  与  $F(T)$  的差异成为和乐。

Berry 提出, 量子力学的绝热近似本质上是参数空间 Hermit 线丛 (即以各参数对应本征态集合为纤维的丛) 上的联络 [6], 它由 (A24) 确定。据此对参数空间中曲线进行的提升, 可以给出量子态的绝热演化曲线。

图 11:  $S^2$  上的矢量平移

### 致谢:

自 1989 年起, 作者关于量子绝热近似理论与 Berry 相因子的系列工作得到了国家自然科学基金的面上项目、霍英东教育基金、优秀中青年人才专项基金, 国家杰出青年基金, 攀登计划以及中国科学院重大交叉科学问题研究基金的资助, 以及香港中文大学和奥地利薛定谔国际数学物理研究所 (ESI) 的部分资助, 谨此致谢。

### 参考文献

- [1] 曾谨言, 裴寿镛 (主编), 量子力学新进展 (第一集) (北京大学出版社, 2000 年)
- [2] D.Bouwmeester, A.Ekert, A.Zeiliner.(eds.), The Physics of Quantum Information (Springer, 2000)
- [3] 孙昌璞, 衣学喜, 周端陆, 郁司夏, 量子退相干问题, 《量子力学新进展 (第一集)》P59-130(曾谨言, 裴寿镛编北京大学出版社, 2000 年)

- [4] Y.Aharonov, D.Bohm, Phys.Rev.**115**,485 (1959)
- [5] M.V.Berry,Proc.R.Lond. **A392**,45-57 (1984)
- [6] A.Shapere , F.Wilczek (ed) Geometric Phases in Physics , Singapore: World Scientific,1989
- [7] 李华钟, 简单物理学系统的整体性 (上海科学技术出版社, 1998 )
- [8] 席夫, 量子力学 (李淑娴, 方励之译) (人民教育出版社, 1982)
- [9] D. 玻姆, 量子理论 (侯德彭译) P602-618 (商务印书馆, 1982 )
- [10] 汤川秀树 (主编) 量子力学 ( I ), P366-371 (科学出版社, 1991 )
- [11] C.N.Yang,in Proc.In.Symp.Found.of Quantum Mechanics,Tokyo,1983,pp5-9.
- [12] J.Y.Zheng, Y.A.Lei, Phys.Rev.**A51**,4415 (1995)
- [13] M.V.Berry .M. Wilkinson, Proc.R.Lond **A392**,15-43 (1984)
- [14] C.P.Sun, J.Phys.A. Math.Gen **21**,1595 (1988)
- [15] 孙昌璞, 高能物理与核物理,
- [16] C.P.Sun, Phys.Rev.**D41**,1349 (1990)
- [17] C.P.Sun, Physica.Scripta, **48**,393 (1993)
- [18] C.P.Sun, X.j.Liu, Acta.Physica.Sinica **53**43 (1996)
- [19] M.Born, R.Openheimer, Ann.Physik **84**,457 (1930)
- [20] 彭桓武, 徐锡申, 理论物理基础 P395-397,(北京大学出版社, 1998 年)
- [21] J.Moody, A.Shapere, F.Wilczek, Phys.Rev.Lett **56**,893-896 (1986)
- [22] C.A.Mead, Phys.Rev.Lett **59**,161-164 (1987)
- [23] R.Jackiw, Inter.J.Mod..Phys. **A3**,285-297 (1988)
- [24] G.Herzberg, H.C.Longuest-Higgins,Disc,Farad. Soc.**35**,77-82 (1963)
- [25] A.J.Stone, Proc.R.Soc.Lond. **A351**,141-150 (1976)
- [26] C.A.Mead and D.G.Truhlar,J.Chem.Phys.**70**(05),2284-2296 (1979)
- [27] H.Z.Li, Phys.Rev.**D35**,2615 (1987)
- [28] H.Z.Li. Phys.Rev.Lett **58**,539 (1987)
- [29] C.P.Sun, M.L.Ge Phys.Rev. **D41**,1349 (1990)
- [30] T.Bitter, D.Dubbers, Phys.Rev.Lett,**59**,251 (1987)
- [31] 孙昌璞, 葛墨林, 中国科学 A, 1990 年第 5 期 P478-484
- [32] M.Stone, Phys.Rev.**D33**,1191 (1986)
- [33] I.Aitchison, Acta Phys.Polonica **B18**,207-235 (1987)
- [34] H.Kuratsuji, S. Iida, Prog.Theor.Phys.**74**,439-445 (1985)
- [35] 孙昌璞, 高能物理与核物理, **14**,692 (1990)

- [36] P.Ehrenfest, Phil.Mag.**33**,500-513 (1917)
- [37] M.Born, V.Fock, Zeit.f.Phys **74**,439-445 (1985)
- [38] J.Kato, J.Phys.Soc.Jap,**5**,435 (1950)
- [39] S.I.Vinitskii,V.L.Derbov,V.N.Dubovik,B.L.Markovski,and Yu.P.Stepanovskii,Sov.Phys.Usp.**33**(6),403  
1990
- [40] B.Simon, Phys.Rev.Lett **51**,2167-2170 (1983)
- [41] F.Wikzek, A.Zee, Phys.Rev.Lett **52**,2111-2114 (1984)
- [42] R.Tycko, Phys.Rev.Lett **58**,2281-2284 (1987)
- [43] A.Zee, Phys.Rev. **A38**,1-6 (1988)
- [44] 孙昌璞袁进胜, 物理学报 **44**,29-34 (1995)
- [45] Cavity Quantum Electrodynamics, ed. by P.R.Berman(Academic Press,1994)
- [46] P.W.H.Pinkse,T.Fischer,P.Maunz,G.Rempe,Nature **404**,365 (2000)
- [47] S.Haroche. M.Brune, J.Raimond, Europhys.Lett.**14**,191 (1991)
- [48] Martin Weitz,Brenton C.Young and Steven Chu,Phys.Rev.Lett.**73**,2653(1994)
- [49] A.Rauschenbeutel,G.Nogues,S.Osnaghi,P.Bertet,M.Brune,J.M.Raimond,S.Haroche Science  
**288**,2024-2028 (2000)
- [50] S. Durr, T. Nonn, G. Rempe, Nature**395**,33 (1998)
- [51] C.P.Sun,Phys.Rev.**A48**,393 (1993)
- [52] C.P.Sun,X.X.Yi,X.J.Liu,Fortschritte Der Physik,**43**,585 (1995)
- [53] C.P.Sun, X.F.Liu, D.L.Zhou, S.X.Yu Phys.Rev.**A63**,012111-1 (2001)
- [54] C.P.Sun, D.L.Zhou, S.X.Yu, X.F.Liu Eur.J.Phys.**D13**,145 (2001);Euj Phy D(2001)in press
- [55] L.D.Landau and E.M.Lifshitz Quantum Mechanics(Non-relativistic Theory)3rd Editon  
Pergamon Press 1987
- [56] C.P.Sun, Phys.Rev.**D38**,298 (1988)
- [57] 孙昌璞, 《高能物理与核物理》, **13** 卷, 403 (1989)
- [58] J.H.Hanny, J.Phys.**A18**,221-230 (1985)
- [59] M.V.Berry, J.Phys.**A18**,15-27 (1985)
- [60] 孙昌璞, 《高能物理与核物理》, **13** 卷, 101 (1989)
- [61] M.V.Berry Nature **326**,277 (1986)
- [62] A.Tomita, R.Chiao, Phys.Rev.Lett.**57**,937(1986)
- [63] C.P.Sun, Chinese Phys. Lett.**6**,481 (1989)