第 55 卷 第 11 期 2006 年 11 月
1000-3290/2006/55(11)/5623-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.11,November,2006

玻色-爱因斯坦凝聚体自囚禁现象的动力学相变及其量子纠缠特性*

马 云[1)†] 傅立斌[2)] 杨志安[1)] 刘 杰[2)]

1)(济南大学理学院,济南 250022)

2)(北京应用物理与计算数学研究所,北京 100088)

(2005 年 10 月 30 日收到;2006 年 2 月 13 日收到修改稿)

研究了量子涨落对自囚禁现象的影响.采用玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)两模模型进行研究,发现有限粒子 BEC 系统自囚禁现象的发生同样存在临界现象,但是由于量子涨落的影响使得这个临界现象变得模糊,并且粒子数越小量子涨落的影响越明显.为了更加明确地描述有限粒子系统的自囚禁现象,通过系统各态平均占有概率的熵(简称平均熵)和平均纠缠熵来刻画自囚禁现象,并讨论自囚禁现象发生前后系统的纠缠特性.

关键词:玻色-爱因斯坦凝聚(BEC),自囚禁,纠缠熵

PACC:0365,0155,7335

1.引 言

随着 1995 年原子玻色-爱因斯坦凝聚的实现,玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)成为了近年来的热门研究课题之一[1,2],并被逐步地应用于精确测量和量子信息处理等高新技术[3].

双势阱模型是一个非常基本的简单物理模型.人们可以用它来研究 BEC 原子的量子隧穿和量子相干等相关特性.最近人们在实验上观测到双势阱中许多有趣的物理现象[4].其中最有趣的现象是自囚禁现象(self-trapping),即使原子间存在排斥相互作用,在对称双势阱中演化的 BEC 却可以呈现高度的不对称分布,好像绝大多数原子被其中的一个阱囚禁,这种反直觉的现象引起了人们的极大兴趣[4—7].

很多研究小组已经对该现象进行了相关深入地讨论和研究[8—13].如在平均场近似下,从理论上发现并很好地描述了 BEC 系统的两种自囚禁现象(oscillation 型自囚禁和 running phase 型自囚禁),并讨论了对称双势阱 BEC 自囚禁的周期调制等[14].

本文主要研究量子涨落对自囚禁现象的影响.对于有限粒子的 BEC 系统,自囚禁发生时也存在临界现象,但是由于量子涨落的影响,这个临界现象变得比较模糊,而且粒子数越小,临界现象越不明确.为了更好地研究纯量子系统的自囚禁现象,我们用平均熵来描述 BEC 自囚禁现象;并用平均纠缠熵来刻画系统自囚禁相变前后的量子纠缠特性.

本文介绍双势阱模型和对称双势阱 BEC 自囚禁现象;讨论量子涨落对系统自囚禁现象的影响;用平均熵与平均纠缠熵对有限粒子数系统的自囚禁现象及其动力学相变进行描述,并讨论系统在自囚禁发生前后的纠缠特性.

2.双势阱 BEC 的自囚禁现象

对于双势阱 BEC 体系,则其无量纲两模近似薛定谔方程为[8,9,12]

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \tag{1}$$

a,b 分别是两个势阱中的概率幅.

哈密顿为

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2} + \frac{c}{2}(|b|^2 - |a|^2) & \frac{v}{2} \\ \frac{v}{2} & -\frac{\gamma}{2} - \frac{c}{2}(|b|^2 - |a|^2) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10474008,10445005)和中国工程物理研究院预研基金资助的课题.

† E-mail:a122074158@126.com

其中,无量纲参量 v 是两势阱中的耦合参数;γ 为两势阱间的能量差,与势阱的形状有关,对称双势阱的 $\gamma=0$,本文讨论的都是对称双势阱;c 为原子间相互作用参数,与 s 波散射有关.

在平均场近似下,我们知道有两种自囚禁现象:oscillation 型自囚禁和 running phase 型自囚禁.其中,running phase 型自囚禁在实验中已经被观测到了,因此本文主要讨论量子涨落对 running phase 型自囚禁的影响.我们先来看平均场近似下的 running phase 型自囚禁现象.

为方便起见,设初始时粒子在一个势阱中的概率为 1(即 $a=1, b=0$),且令 $v=1$,c 分别取 1.99,2.0,2.01,2.05 时,得到在平均场近似下布居数差 s ($s=|b|^2-|a|^2$)与时间 t 的图像如图 1 所示.

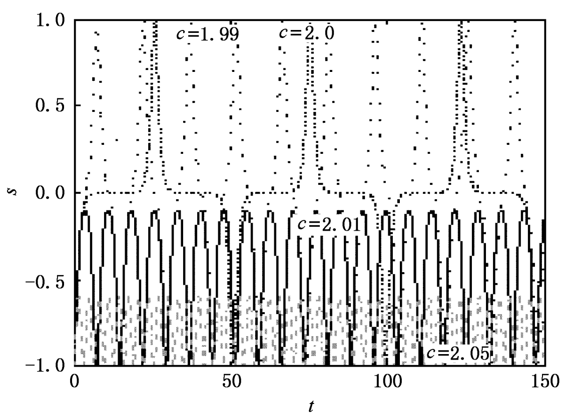

图 1　布居数差 s ($s=|b|^2-|a|^2$)随时间 t 的变化图像

从图 1 可以看到明显的自囚禁现象.$c/v<2$ 时,粒子在两势阱间振荡,布居数差 s 对时间的平均值 $\langle s\rangle=0$,即粒子在两势阱中的分布是对称的;$c/v>2$ 时,布居数差 s 对时间的平均值 $\langle s\rangle$ 不为 0,粒子在两对称势阱中的分布具有不对称性,而且粒子间非线性相互作用参数 c 值越大,粒子在两阱间分布的不对称性就越高,粒子自囚禁现象也就越明显.系统自囚禁现象的相变在 $c/v=2$ 时发生.

为了更加清晰地体现在平均场近似下自囚禁现象是如何发生的,我们将布居数差 s 对时间求平均值,并做出它随 c 变化的图线,如图 2 所示.

从图 2 可以明显的看到当 $c=2$ 时,系统发生了自囚禁现象.$c>2$ 后,随 c 的增加自囚禁现象越明显.

3. 量子涨落对自囚禁现象的影响

纯量子体系的两模哈密顿可以表示为[13—15]

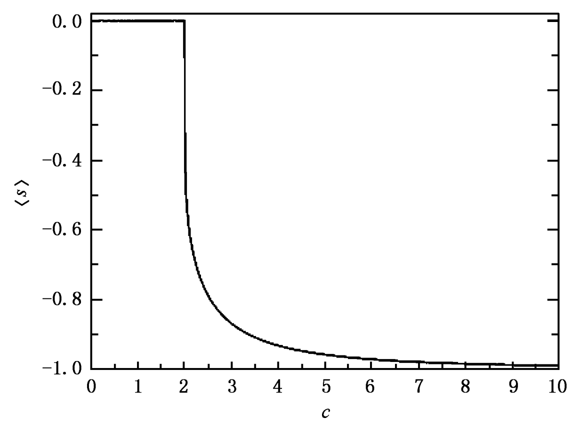

图 2　布居数差 s 对时间求平均值随 c 变化关系

$$H=-\gamma_1(a^+a-b^+b)-c_1(a^+a^+aa+b^+b^+bb)+v_1(a^+b+b^+a), \tag{3}$$

其中,γ_1 为量子体系两势阱间的能量差,c_1 为该体系粒子间的相互作用参数,v_1 为两阱间的耦合系数,a^+,b^+ 分别是两模的粒子产生算符,a,b 分别是两模的湮没算符,$[a^+,a]=1$,$[b^+,b]=1$,$[a^+,b^+]=0$.

为了计算方便,选取 $|N,0\rangle$ 为初态($N=200$),则此时粒子全部处于一个势阱中;并令 $v=1$,c 分别取 0.5,1.9,2.1,2.5,利用此哈密顿进行相应的计算:

$$\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{d}c_m}{\mathrm{d}t}=\sum_n \mathrm{i}H_{mn}C_n, \tag{4}$$

其中

$$H_{mn}=\langle n,N-n|H|m,N-m\rangle,$$

$$s=|a|^2+|b|^2=\sum_m |C_m|^2\frac{N-2m}{N}, \tag{5}$$

式中 $C_{n,m}$ 为系统处于某量子态的概率幅;$|a|^2$,$|b|^2$ 分别为粒子处于两势阱中的概率;s 为布局数差.

当粒子间非线性相互作用参数 c 分别取 0.5,1.9,2.0,2.5 时,布居数差 s 随时间 t 的变化图线如图 3 所示.

从图 3 中我们发现布居数差 s 随时间 t 的变化图线无法清晰地展现粒子由振荡到自囚禁状态变化过程.所以我们考察了布居数差的平均值 $\langle s\rangle$ 与粒子间非线性相互作用参数 c 的变化关系(图 4).

图 4 中,通过对比可以看到,在平均场近似下,系统发生自囚禁有一个非常明显的临界现象.而由于量子涨落的影响,这个临界现象变得比较模糊.而

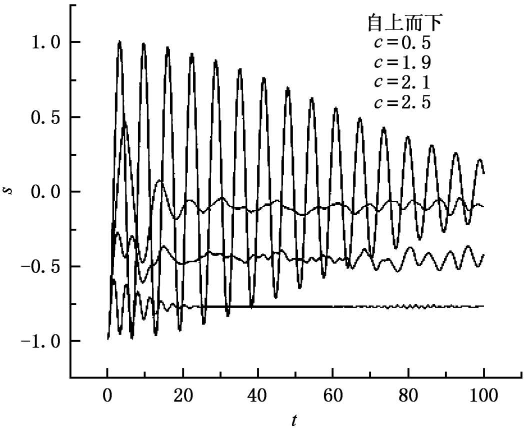

图 3　布居数差 s 与时间的变化关系

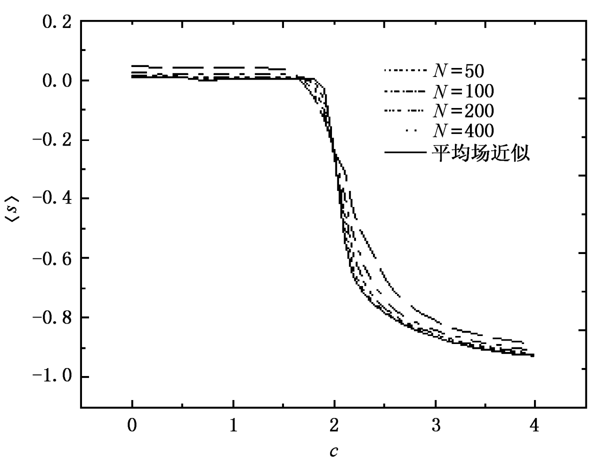

图 4　布居数差的平均值⟨s⟩与粒子间非线性相互作用参数 c 的变化关系

且,粒子数越小,量子涨落的影响越明显,系统发生自囚禁的临界现象越不明确.因为,量子涨落是由于系统一般不处于本征态上引起的,所以布居数要随时间发生改变,布局数差也会相应发生变化.当粒子数很大时这种改变相对系统是个小量,但当粒子数有限时就可能影响系统的行为.所以,当粒子数较小时,量子涨落对系统的影响比较明显,模糊了系统发生自囚禁的临界现象.

对于粒子数有限的纯量子系统而言,所谓自囚禁就是粒子被囚禁在有限的几个量子态上.所以有必要进一步研究有限粒子系统在一定时间段内,对应于不同的粒子间相互作用参数 c,粒子在各量子态的分布情况.

通过计算,我们得到 $c=0,1.95,2.5$ 时粒子对时间的各量子态分布概率等高线图像如图 5(a),(b),(c).其中,图的横坐标为时间,纵坐标为量子态的序数,图线所代表的数值为粒子在各态上的概率.

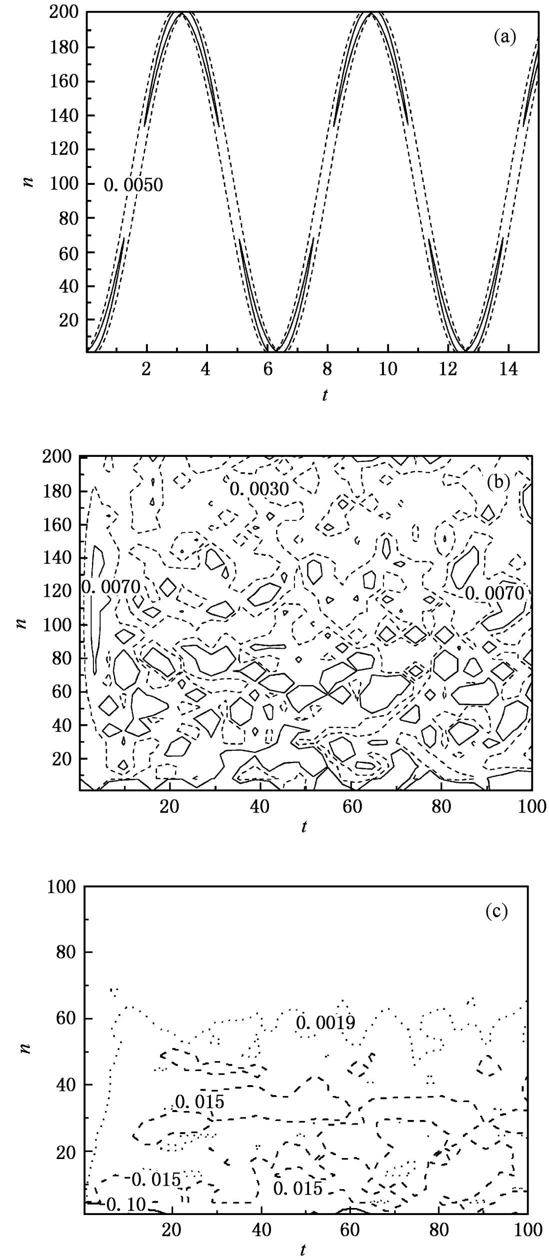

图 5　(a) $c=0$ 各量子态分布概率等高线图像;(b) $c=1.95$ 时各量子态分布概率等高线图像;(c) $c=2.5$ 各量子态分布概率等高线图像

图 5(a)中,可以看到 $c/v=0$ 时,粒子各态遍历,而且在一定时间段内,粒子在各态上的平均分布概率大致相等.在图 5(b)中,当 c/v 接近 2 时,对应于每一时刻粒子在各态上均有分布,且概率几乎相等.而从整个时间段来看粒子也是各态遍历,且分布概率大致相同.图 5(c)是 $c/v>2$ 时粒子在各态的分布情况,此时,粒子被束缚在某几个态上,也就是系统

的自囚禁现象.

为了进一步定量地刻画有限粒子系统的自囚禁现象,我们引入熵来进行相关研究与讨论.

4. 有限粒子系统自囚禁现象的量子纠缠特性

4.1. 量子纠缠熵

量子纠缠熵是基于全同粒子的模式纠缠理论用于描述体系纠缠程度的特征量.

全同粒子的两模系统,设系统的总粒子数为 N,则系统波函数的表达式为

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{N} c_n |n\rangle |N-n\rangle, \tag{6}$$

$$\sum_{m=0}^{N} |C_n|^2 = 1,$$

$|C_n|^2$ 表示粒子在每个态的占有概率.

两模量子体系纯态的纠缠程度我们用其中任一模式的 von Neumann 熵来表示.这样,两体系统的纠缠熵的表达式为[15]

$$\begin{aligned} E(\rho_A) &= -\mathrm{Tr}[\rho_A \log(\rho_A)] \\ &= -\sum_k \lambda_k \log(\lambda_k), \end{aligned} \tag{7}$$

对子系统 B 部分求迹得到子系统 A 的约化密度矩阵

$$\rho_A = \sum_i \lambda_i^2 |i_A\rangle\langle i_A|. \tag{8}$$

用 Fock 基表示为

$$\begin{aligned} \rho_A &= \mathrm{Tr}_B(\rho) = \sum_{n,m,k}^{N} C_m C_n^* |m\rangle\langle n| \\ &\quad \times \langle k|N-m\rangle\langle N-n|k\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N} |C_n|^2 |n\rangle\langle n|. \end{aligned} \tag{9}$$

通过(9)式,得到系统的约化密度矩阵是对角矩阵,并且特征值为 $\lambda_i = |C_i|^2$.所以,两模 BEC 系统纠缠熵的表达式为[16,17]

$$E_{\rho_1} = -\sum_{n=0}^{N} |C_n|^2 \log |C_n|^2. \tag{10}$$

4.2. 有限粒子系统自囚禁现象及其纠缠特性

我们用表征粒子在各态平均分布情况的平均熵来定量地刻画有限粒子系统自囚禁现象并用表征系统平均纠缠程度的平均纠缠熵来描述系统自囚禁现象的纠缠特性.

用平均熵描述量子系统自囚禁现象的动力学相变.先求出对应于同一个粒子间排斥相互作用参数 c 系统不同时刻的波函数,并取适当时间间隔对各态的占有概率 $|C_n|^2$ 求平均值,然后计算出平均占有概率的熵,即 $E_{\mathrm{aver}} = -\sum_{i=1}^{N}\langle |C_n|^2\rangle \log\langle |C_n|^2\rangle$.平均熵表征在一段时间间隔内,粒子在各态的分布情况,熵越大,粒子在这段时间内分布得越均匀.当熵为 $\log(N+1)$ 时,在这段时间内粒子是均匀分布的,其中包含两种情况:1)粒子各态遍历,均匀分布,但各态间不纠缠;2)在这段时间中,粒子不但各态遍历,均匀分布,且系统处于最大纠缠态,即各态间高度纠缠.

用纠缠熵的平均值来描述系统自囚禁现象的量子纠缠特性.先求出对应于同一个粒子间排斥相互作用参数 c 不同时刻的纠缠熵,再取适当时间间隔对系统纠缠熵求平均值即 $\langle E\rangle = \langle -\sum_{i=1}^{N} |C_n|^2 \log |C_n|^2\rangle$.平均纠缠熵越大,系统的平均纠缠程度越高,当 $E = \log(N+1)$,系统处于最大纠缠态.

对一个粒子数为 $N = 200$ 的对称双势阱 BEC 系统,为计算方便设初态为 $|N,0\rangle$,计算得到系统平均熵与平均纠缠熵随粒子间相互作用参数 c 的变化图像如图 6 所示.

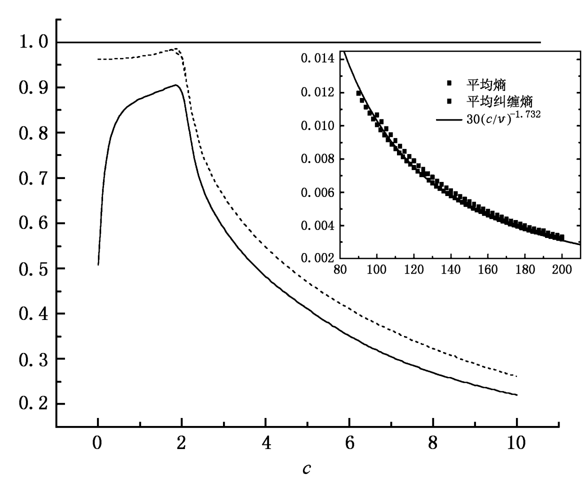

图 6 系统平均熵与平均纠缠熵随粒子间相互作用参数 c 的变化

首先,在图中可以看到用平均熵和平均纠缠熵对系统自囚禁进行描述都可以在 $c/v = 2$ 这一点看到较明显的临界现象.与平均场近似下的描述相符合.

其次,我们进一步分析系统自囚禁现象及其纠缠特性.

1)$c<2$ 时,平均熵接近 1,系统波函数是各态遍历的,在量子时间内在每个态上的分布概率都近似相等,对应的物理过程就是粒子在两阱间振荡;而此时,虽然在量子时间内系统在每个态上的分布概率都近似相等但各态之间纠缠程度较低(见图 5(a)).随着粒子间非线性排斥相互作用的增大,平均熵慢慢趋近于 1,平均纠缠熵迅速增大,系统的纠缠程度越来越高.

2)当 c 取 2 时系统平均分布概率的熵达到 1,纠缠熵的平均值也达到最大值,此时系统粒子在各态上的分布都相等,且各态间高度纠缠(见图 5(b)).

3)$c>2$ 时,随着 c 的增大,平均熵逐渐减小,即 c 越大,粒子分布越不均匀,逐渐被'囚禁'在某几个态上,系统出现了自囚禁现象.这个结果与平均场近似下的结果非常符合,此时,整个系统的纠缠程度逐渐降低(见图 5(c)).当 c 趋于无限大时,粒子逐渐被囚禁在 $|N,0\rangle$ 态上,且平均熵和平均纠缠熵都随 c 的增大逐渐趋于 0.

我们知道了整个系统的平均纠缠特性,我们更感兴趣的是粒子在被囚禁的几个特定态上的纠缠程度是怎样的.设在 c 为大于 2 的某一值时,粒子被囚禁在 m 个态上,如果 m 个态最大纠缠,根据平均熵和平均纠缠熵各自的计算表达式不难得到此时 $E_{\text{aver}}=\langle E\rangle=\log m$,即一般来说,图中两条图线越接近,纠缠程度越高.从图 6 可以看出,$c>2$ 时粒子被囚禁在有限的几个态上,但这几个态并不是高纠缠的.

总起来说,纯量子系统 BEC 自囚禁现象的动力学相变过程及其量子纠缠特性是当非线性相互作用参数 $c<2$ 时,粒子各态遍历均匀分布.$c=0$ 时各态间纠缠程度很低.当 c 由 0 逐渐增大到 2 的过程中,系统的纠缠程度迅速增高并在 $c=2$ 的相变时达到最大值.$c>2$ 时系统出现自囚禁现象,粒子被囚禁在某几个态上,但各态间的纠缠程度较低.当 c 趋于无限大时,系统平均纠缠度趋近于 0,粒子被囚禁在 $|N,0\rangle$ 态上.

5. 总　　结

本文,主要讨论了量子涨落对自囚禁现象的影响.我们发现由于量子涨落的影响,系统发生自囚禁的临界现象变得模糊.为了更好地描述有限粒子系统自囚禁现象,我们在对一个时间段内系统所有粒子在各态占有概率进行讨论的基础上引入了熵,并用一个时间段内系统各态平均占有概率的熵和平均纠缠熵对量子系统自囚禁现象进行了定量描述,并得到了系统发生自囚禁前后的量子纠缠特性.即自囚禁现象发生前,粒子在各态上分布概率较为平均,各态间不纠缠,纠缠程度随非线性作用参数 c 的增大而增高;$c=2$ 时系统出现自囚禁现象,且随 c 增大,粒子逐渐被囚禁在某几个态上,各态间纠缠程度较低;当 c 趋于无穷时,粒子被囚禁在 $|N,0\rangle$ 态上,系统不纠缠.

[1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R *et al* 1995 *Science* **269** 198
Davis K B, Mewes M O, Andrews M R *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
Bradley C C, Sackett C A, Tollett J J *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687

[2] Franco D, Giorgini S, Lev P *et al* 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
Anthony L J 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 307
Liu J, Zhang C W, Raizen M G *et al* 2006 *Phys. Rev.* A **73** 013601
Liu J, Wang W G, Zhang C W *et al* 2005 *Phys. Rev.* A **72** 063623
Liu W M, Fan W B, Zheng W M *et al* 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170408
Liu W M, Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2294

[3] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, England)

[4] Michael A, Gati R, Fölling J *et al* 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010402

[5] Tan W H, Yan K Z 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1983 (in Chinese) [谭维翰、闫珂柱 1999 物理学报 **48** 1983]

[6] Tan W H, Yan K Z 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1909 (in Chinese) [谭维翰、闫珂柱 2000 物理学报 **49** 1909]

[7] Yan K Z, Tan W H 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1185 (in Chinese) [闫珂柱、谭维翰 1999 物理学报 **48** 1185]

[8] Smerzi A, Fantoni S, Giovanazzi S *et al* 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4950

[9] Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev.* A **61** 023402

[10] Liu J, Wu B, Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404
Wu B, Liu J, Niu Q 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 140402

[11] Fu L B, Liu J, Chen S G 2002 *Phys. Lett.* A **298** 388
Fu L B, Chen S G 2005 *Phys. Rev.* E **71** 016607
Fu L B, Liu J, Chen S G *et al* 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** L181
[12] Liu J, Fu L B, Biyiao Ou *et al* 2002 *Phys. Rev.* A **66** 023404
[13] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳、傅立斌、赵 鸿、刘 杰 2005 物理学报 **54** 5003]
[14] Wang G F, Fu L B, Liu J 2006 *Phys. Rev.* A **73** 013619
[15] Kagan Y, Surkov E L, Shlyapnikov G W 1997 *Phys. Rev.* A **55** R18
[16] Dodd R J, Burnett K, Edwards M *et al* 1997 *Phys. Rev.* A **56** 587
Rokhsar D S 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 2164
[17] Hines A P, McKenzie R H, Milburn G J 2003 *Phys. Rev.* A **67** 013609

Dynamical phase changes of the self-trapping of Bose-Einstein condensates and its characteristic of entanglement*

Ma Yun[1)†] Fu Li-Bin[2)] Yang Zhi-An[1)] Liu Jie[2)]

1) (*Jinan University, Jinan 250022, China*)

2) (*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China*)

(Received 30 October 2005; revised manuscript received 13 February 2006)

Abstract

In this paper, we exploit two-mode model to investigate the influence of quantum fluctuation on the self-trapping of the Bose-Einstein Condensate (BEC). We found that, even for the finite number of particles, the transition to self-trapping is still observed. In particular, because of the quantum fluctuation due to the finite number of particles, the critical phenomenon becomes fuzzily: the smaller the number of particles is, the more obviously fuzzily the critical phenomenon becomes. Quantum entanglement entropy is then introduced to depict the critical behavior near the transition point.

Keywords: Bose-Einstein condensate (BEC), self-trapping, entanglement entropy

PACC: 0365, 0155, 7335

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10474008, 10445005) and the Science and Technology Fund of CAEP.

† E-mail: a122074158@126.com