第 54 卷 第 11 期 2005 年 11 月
1000-3290/2005/54(11)/5003-11

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.11, November, 2005

双势阱玻色-爱因斯坦凝聚体系的自俘获现象及其周期调制效应*

王冠芳[1)2)] 傅立斌[3)†] 赵 鸿[1)] 刘 杰[3)]

[1)] (兰州大学物理科学与技术学院理论物理研究所，兰州 730000)

[2)] (中国工程物理研究院北京研究生部，北京 100088)

[3)] (北京应用物理与计算数学研究所，北京 100088)

(2005 年 3 月 30 日收到；2005 年 4 月 29 日收到修改稿)

研究了双势阱玻色-爱因斯坦凝聚体系(BEC)的自俘获现象(self-trapping). 在平均场近似下通过相平面(phase space)分析的方法研究了两种自俘获的机理：1)势阱中的粒子数在平衡位置附近振动，而相对相位随时间单调变化(running-phase)；2) 势阱中的粒子数和相对相位都在平衡点附近振动. 研究了周期调制场对自俘获现象的影响，发现发生自俘获现象的相变参数能够被周期场非常有效的调制，从而在弱相互作用 BEC 体系中也可以观察到自俘获现象. 还研究了多体量子涨落对自俘获现象的影响，讨论了在现有的实验条件下对凝聚体自俘获现象进行观察和周期调制.

关键词：玻色-爱因斯坦凝聚，自俘获，双势阱，周期调制

PACC：0365，0155，7335

1. 引 言

1925 年提出的玻色-爱因斯坦理论预言了在极低温度下玻色理想气体将形成一种新的物态——玻色-爱因斯坦凝聚态(BEC). 它是一种具有宏观量子相干、宏观量子隧穿及量子超流性质的量子流体[1]. 在 70 年后的 1995 年，美国国家标准局和科罗拉多大学联合实验室(JILA)、莱斯大学(RICE)和麻省理工学院(MIT)在各自的实验室实现了碱金属原子(^{87}Rb，^{7}Li 和^{23}Na)的玻色-爱因斯坦凝聚[2]. BEC 的奇特性质，使它不仅对基础研究有重要意义，而且在芯片技术、精密测量和纳米技术等领域都让人看到了非常美好的应用前景. 例如，凝聚体中的原子几乎不动，可以用来设计精确度更高的原子钟 利用凝聚体很好的相干性，可以研制高精度的原子干涉仪；原子激光也可用于精密雕刻. BEC 还被建议用于量子信息的储存、传输和处理. 这些美好的应用前景使 BEC 的理论和实验研究成为热门课题. 目前全世界有很多研究小组从事这方面的工作，他们都取得了卓越的成就，如研究 BEC 的超流性[3—8]、光学性质、隧穿性质[9—13]、稳定性和涡旋态[14—17]. 最近又成功实现了凝聚态下铷原子气超流态与绝缘态的可逆转换以及费米子对的凝聚[18]等.

双势阱模型是一个非常基本的简单物理模型. 人们可以用它来研究 BEC 原子的量子隧穿和量子相干. 最近双势阱在实验上已具体实现并掀起了新的研究热潮. 其中最有意思的现象是所谓的自俘获现象(self-trapping)：人们发现，由于原子间的相互作用，在对称双势阱中演化的 BEC 却可以呈现高度的不对称分布，好像绝大多数原子被其中的一个阱俘获. 即使在排斥相互作用下原子也会呈现不对称分布，这种反直觉的现象引起了人们的极大兴趣，且最近已被实验观测到[19].

本文用相平面(phase space)分析方法研究了这一有趣的物理现象. 我们发现自俘获现象可以分为两类：一类是大家已经知道的，具有相对相位随时间单调变化(running phase)性质的自俘获；还有一类是粒子布居数和相对相位都在平衡点附近振荡. 特别地，我们发现对能级差进行高频周期调制可以有

* 国家自然科学基金(批注号：10474008，10445005)和中国工程物理研究院预研基金资助的课题.

† E-mail：lbfu@iapcm.ac.cn

效地调解自俘获现象的相变参数,这等价于增强了相互作用,使弱相互作用下不易观察的现象变得明显可测. 对低频调制情形,在绝热近似下依然可以解析的给出自俘获的相变参数. 在中等频率的周期场调制下,我们发现它将诱导出混沌现象. 表现为,当增强原子间相互作用强度时,自俘获和非俘获现象交替出现. 这些结果都是在平均场近似下研究戈罗斯-比特乌斯基(Gross-Pitaevskii)方程(GPE)得到的. 此外,我们还从量子多体问题出发研究了量子涨落对自俘获现象的影响.

2. 双势阱 BEC 体系的自俘获与周期调制

BEC 的研究涉及到了量子力学的基本问题. 事实上,序参量被认为是单个宏观凝聚体的整体波函数,它遵从非线性薛定谔方程,即 GPE[20]. GPE 被成功地用于研究 BEC 的动力学性质,如整体频率[21]、单极振荡的弛豫时间[22]、混沌行为[22,23]和量子涡旋的亚稳性[24]. 对两个弱相互作用 BEC 组成的系统,在一定条件下把 GPE 简化成两模薛定谔方程有助于从简单模型入手研究凝聚体的各种性质. 如量子隧穿效应,包括双势阱中两个弱耦合凝聚体间的约瑟夫森振荡和宏观量子自俘获[5,25]及光晶格中 BEC 的非线性朗道齐纳隧穿(Landau-Zener Tunnelling)[9,12,26,27].

对双势阱 BEC 体系,如果把随时间演化的波函数看成分别描述两个势阱中的凝聚体的波函数的叠加,并且认为每个阱中波函数随时间的演化和随位置的变化是可以分离变量的,就可以得到两模近似的薛定谔方程,即两模 GPE

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = H\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 a, b 分别是两个势阱中的概率波,哈密顿为

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2} - \frac{c}{2}(|b|^2 - |a|^2) & -\frac{v}{2} \\ -\frac{v}{2} & -\frac{\gamma}{2} + \frac{c}{2}(|b|^2 - |a|^2)\end{pmatrix}, \tag{2}$$

v 是两势阱中凝聚体间的耦合系数,γ 是两势阱的最低能量差,c 表示相互作用强度[9,12,28—33]. 总概率 $|a|^2 + |b|^2$ 守恒,设为 1.

令 $a = |a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_a}$, $b = |b|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_b}$,并引入布居数差 $s = |b|^2 - |a|^2$ 和相对相位 $\theta = \theta_b - \theta_a$,于是有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\sqrt{1 - s^2}\sin\theta, \tag{3a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \gamma - cs - \frac{sv\cos\theta}{\sqrt{1 - s^2}}, \tag{3b}$$

s, θ 是一对经典哈密顿系统的正则变量,满足 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial\theta}$, $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial s}$. 这个经典系统的哈密顿为

$$H = -\frac{c}{2}s^2 + \gamma s + v\sqrt{1 - s^2}\cos\theta. \tag{4}$$

下面分两种情况讨论:不加周期调制和加周期调制. 我们的讨论都基于对称双势阱 $\gamma = 0$.

2.1. 不加调制

相平面中哈密顿系统的演化有二种轨道:不动点和它周围的轨道[12]. 随着参数的不同,将出现三种不同的演化情况,如图 1.

当相互作用比较弱时,相平面中有两个不动点 p_1, p_2(图 1(a))分别在 $s = 0, \theta = \pi$ 和 $s = 0, \theta = 0$ 处,它们都是稳定的. 对于绕不动点 p_1 的那些轨道,布居数差 s 在 $[-1, 1]$ 间变化,相对相位 θ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 内变化,等效的经典系统的哈密顿 H 在 $[-v, -\frac{c}{2}]$ 间变化(图 1(a′));对于绕不动点 p_2 的那些轨道,s 在 $[-1, 1]$ 间变化,θ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内变化,H 在 $[-\frac{c}{2}, v]$ 间变化. 其中 $H = -\frac{c}{2}$ 对应通过 $s = \pm 1$ 的轨道;$H = v$ 是等效经典哈密顿的极大值. 此时,不动点对应的粒子分布是平衡分布,它周围的轨道对应于粒子在双势阱间振荡,即约瑟夫森振荡,布居数差对时间的平均值为零 $\langle s\rangle = 0$.

当粒子间的相互作用大于势阱中凝聚体间的耦合时,即 $\frac{c}{v} > 1$ 时,相平面中在 $\theta = \pi$ 这条线上出现新的不动点:稳定不动点 p_1, p_3 和不稳定不动点 p_4(图 1(b)),它们分别在 $s = -k_1, k_1, 0$ 处,其中 $k_1 = \sqrt{[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$. 除了分别绕 p_1, p_2 的封闭轨道外,还出现了绕这三个不动点的公共轨道. 对于这些公共轨道,s 在 $[-1, 1]$ 间变化,H 在 $[-v, -\frac{c}{2}]$ 间变化,布居数差对时间的平均值为零 $\langle s\rangle = 0$. 对于绕 p_1, p_3 的封闭轨道,能量是简并的,H 在 $[-h, -v]$ 间变化,但 s 分别在 $[-k_2, 0]$ 和 $[0, k_2]$ 间变化,θ 在不动点(即平衡点)附近振荡,其中 $k_2 = \frac{2v}{c}\sqrt{\frac{c}{v} - 1}$, $h =$

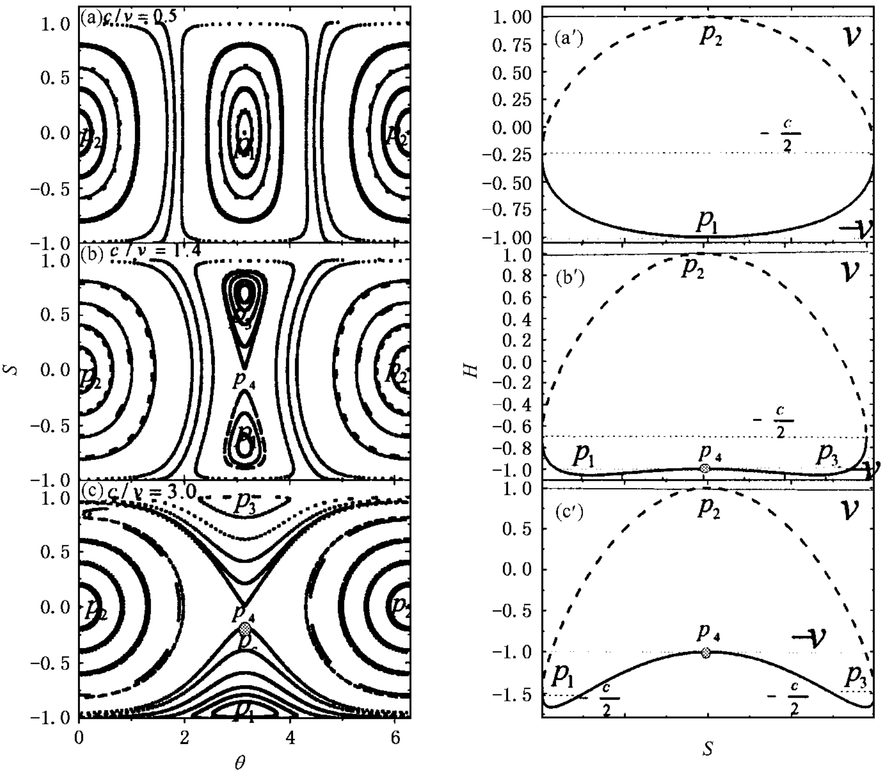

图 1　相平面中系统哈密顿的演化　(a),(b),(c)分别代表 $c/v=0.5,1.4,3.0$ 时势阱中粒子布居数差和相对相位的关系　(a′),(b′),(c′)是相应的能量曲线,其中下半部实曲线代表 $\theta=\pi$ 时的能量曲线,上半部虚曲线代表 $\theta=0$ 时的能量曲线;点划线代表 $H=-\frac{c}{2}$,它始终对应相空间中 $s=\pm1$,θ 为任意值的轨道;虚实线代表 $H=v$;点点线代表 $H=-v$.

$\frac{c}{2}\left[1+\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]$. 显然对应于不动点 p_1,p_3 粒子是不平衡分布的;围绕它们的轨道,布居数差 s 对时间的平均值不为零,即$\langle s\rangle\neq0$,粒子发生了自俘获. 这种布居数差 s 和相对相位 θ 都在平衡点附近振荡的自俘获态,类似于单摆的振荡(oscillation)轨道,我们称为振荡自俘获. 不动点 p_4 实际上是等效经典系统哈密顿的鞍点,相应的 $H=-v$. 不动点 p_2 仍在原来的位置上,与它周围的轨道相应的 s,θ 的振荡范围没有变化,H 仍然在$\left[-\frac{c}{2},v\right]$间变化.

随着相互作用的加强,当 $-\frac{c}{2}<-v$,即$\frac{c}{v}>2$ 时,围绕 $\theta=\pi$ 这条线上三个不动点的公共轨道不存在,相平面中出现新的轨道(如过点 p_c 的轨道(图 1(c)). 对于这些新轨道,能量是简并的,H 在$\left[-\frac{c}{2},-v\right]$间变化(图 1(c′)),$s$ 在$[-1,0]$或$[0,1]$间振荡,相对相位 θ 单调增加,显然,与此相应$\langle s\rangle\neq0$,粒子发生自俘获. 这种自俘获态类似于单摆的相对相位单调变化的轨道,我们称为相对相位单调变化的自俘获,即通常所说的自俘获. 不动点 p_1,p_2,p_3 以及围绕不动点 p_1,p_3 的轨道仍然存在. 对于 p_1,p_3 周围的那些轨道,s 分别在$[-1,-k_3]$和$[k_3,1]$间变化,θ 在不动点附近振荡,能量是简并的,它在$\left[-h,-\frac{c}{2}\right]$间变化,其中 $k_3=\sqrt{1-\left(\frac{2v}{c}\right)^2}$. 对于 p_2 周围的轨道,s,θ 振荡范围不变,H 在$[-v,v]$间变化. 这说明振荡自俘获和约瑟夫森振荡仍然存在. 不动点 p_4 位置不变.

由上面的分析知,$\frac{c}{v}=1$ 是发生振荡自俘获的临界条件;$\frac{c}{v}=2$ 是发生相对相位单调变化的自俘获(即通常所说的自俘获)的临界条件,这个临界值与通过 $s=\pm1$ 的轨道(即相平面中不动点 p_2 周围最外层的轨道,如图 1(a),(b))从约瑟夫森振荡向自俘获转变的临界值是一致的. 这可从布居数差随时间的演化情况观察到. 如图 2(a),固定 v 值($v=1.0$),设初始时粒子在一个势阱中布居的概率为 1,在另一个势阱中布居的概率为 0,对应于 $s=-1$ 这

条轨道，θ 初值取为 0，可以看到$\frac{c}{v}<2$ 时$\langle s\rangle=0$，表明粒子在两势阱间振荡；$\frac{c}{v}>2$ 时$\langle s\rangle\neq0$，表明粒子自俘获了；$\frac{c}{v}=2$ 是临界状态，且 c 越大自俘获越明显．这样的自俘获现象已被很多人研究过[5,25,34]．

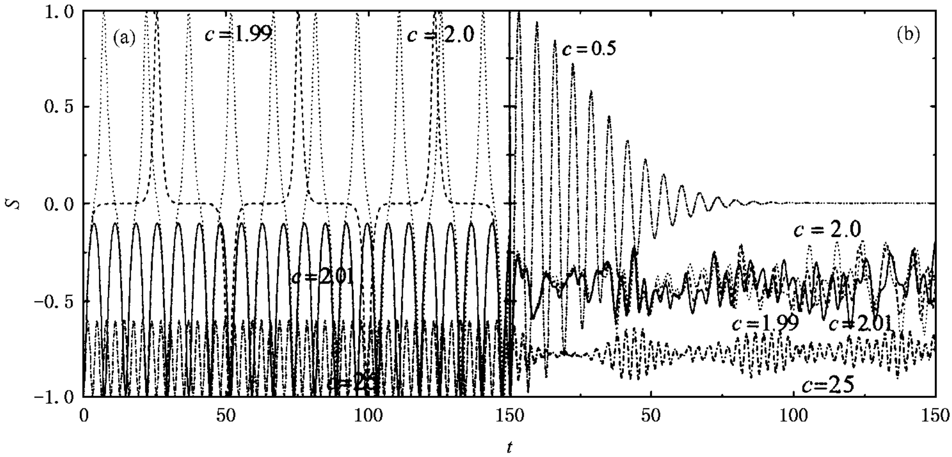

图 2 $v=1.0$ 不加调制时，布居数差随时间的演化（点线、划线、实线、点划线分别对应 $c=1.99,2.0,2.01,2.5$）(a)代表平均场近似结果；(b)代表 $N=50$ 的纯量子系统的结果，其中较大的衰减振荡对应 $c=0.5$（点点划线），$c=1.99,2.0,2.01$ 这三条线几乎重合在一起

给哈密顿(2)加上周期调制 $A\sin\omega t$ 后，系统就会出现许多新性质，如通过调节参数可以控制量子隧穿率[35—37]．我们感兴趣的是，不同调制频率和强度对系统自俘获现象的影响．

2.2. 加周期调制

加周期调制后系统哈密顿变为

$$H=\begin{pmatrix}\frac{A}{2}\sin\omega t-\frac{c}{2}(|b|^2-|a|^2) & -\frac{v}{2}\\ -\frac{v}{2} & -\frac{A}{2}\sin\omega t+\frac{c}{2}(|b|^2-|a|^2)\end{pmatrix}. \tag{5}$$

我们主要关心自俘获的条件．按 ω 大小分三种情况深入讨论，会看到三种不同的现象．

2.2.1. 高频调制($\omega\gg v$)

系统加上高频周期调制场 $A\sin\omega t$ 后，对不同的相互作用强度 c，数值计算布居数差随时间的演化，发现也能观察到图 2(a)那样的临界现象．例如 $\omega=100$，$\frac{A}{\omega}=1.0$ 时，$\langle s\rangle=0$ 和$\langle s\rangle\neq0$（即非俘获与自俘获）的临界值是 $c=1.53$（图 3(a)）．

这时，薛定谔方程不再是定态的．作变换 $a=e^{\mathrm{i}\frac{A}{2\omega}\cos\omega t}a'$，$b=e^{-\mathrm{i}\frac{A}{2\omega}\cos\omega t}b'$ 薛定谔方程写为

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}a'}{\mathrm{d}t}=-\frac{c}{2}(|b'|^2-|a'|^2)a'-\frac{v}{2}e^{-\mathrm{i}\frac{A}{\omega}\cos\omega t}b', \tag{6a}$$

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}b'}{\mathrm{d}t}=\frac{c}{2}(|b'|^2-|a'|^2)b'-\frac{v}{2}e^{\mathrm{i}\frac{A}{\omega}\cos\omega t}a', \tag{6b}$$

用公式

$$e^{\pm\mathrm{i}z\cos\omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)(\pm\mathrm{i})^n e^{\pm\mathrm{i}n\omega t}, \tag{7}$$

$J_n(z)$是 n 阶贝塞尔函数，上面方程变为

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}a'}{\mathrm{d}t}=-\frac{c}{2}(|b'|^2-|a'|^2)a'-\frac{v}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n\left(\frac{A}{\omega}\right)(-\mathrm{i})^n e^{-\mathrm{i}n\omega t}b', \tag{8a}$$

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}b'}{\mathrm{d}t}=\frac{c}{2}(|b'|^2-|a'|^2)b'-\frac{v}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n\left(\frac{A}{\omega}\right)(\mathrm{i})^n e^{\mathrm{i}n\omega t}a', \tag{8b}$$

对 $\omega\gg v$ 的高频调制，在一个周期$\frac{2\pi}{\omega}$内 a'，b' 变化很

慢，当$\frac{A}{\omega}$不是很大时，对(8)式积分，高阶项的贡献很小可以忽略掉[38,39]，只保留零阶贝塞尔函数项. 这样，薛定谔方程变为

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{2}(|b'|^2 - |a'|^2) & -\frac{v}{2}J_0\left(\frac{A}{\omega}\right) \\ -\frac{v}{2}J_0\left(\frac{A}{\omega}\right) & \frac{c}{2}(|b'|^2 - |a'|^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}, \tag{9}$$

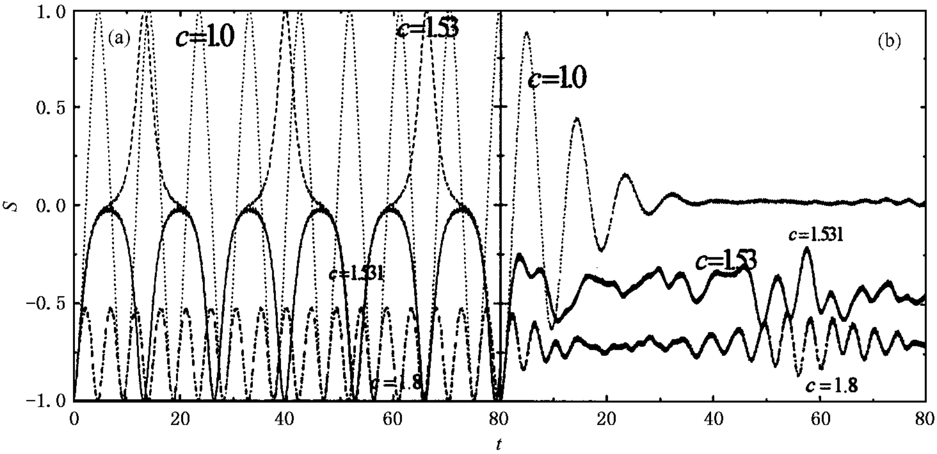

图 3　$v = 1.0$，$\omega = 100$，$A/\omega = 1.0$ 时布居数差随时间的演化(点线、划线、实线、点划线分别对应 $c = 1.0$，1.53，1.531，1.8)(a)代表平均场近似结果；(b)代表 $N = 50$ 的纯量子系统的结果，其中 $c = 1.53$ 和 $c = 1.531$ 这两条线重合在一起

近似为与(1)式形式相同的不含时的定态方程. 所以高频调制情况的自俘获条件可以通过与(1)式的参数对比得到. 因为贝塞尔函数值小于 1，所以高频调制使两势阱 BEC 间有效的耦合变小，这就使得一些在强相互作用系统才能发生的现象将在弱相互作用系统中通过高频周期场调制变得可以发生.

由 2.1 部分的讨论可知$\frac{c}{v} = 2J_0\left(\frac{A}{\omega}\right)$是发生相对相位单调变化的自俘获的临界条件. 这一点可由数值计算结果证实. 固定 v($v = 1.0$)，对不同的调制频率分别改变$\frac{A}{\omega}$的值，据布居数差随时间的演化情况，找到相应的$\frac{c}{v}$的临界值，发现这个临界值与$\frac{A}{\omega}$的关系同 $2J_0\left(\frac{A}{\omega}\right)$符合得很好，且调制的频率越大二

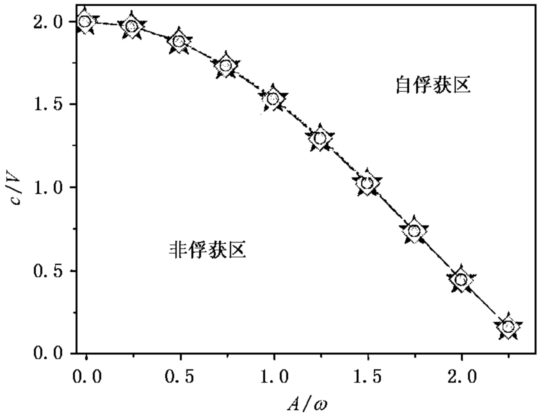

图 4　$v = 1.0$，s 初值为 -1，θ 初值为 0，不同调制频率 ω 下 c/v 的临界值与 A/ω 的关系(小三角、圆圈、方块分别对应 $\omega = 10$，100，1000 时 c/v 的临界值与 A/ω 的关系；五角星对应 $2J_0(A/\omega)$)

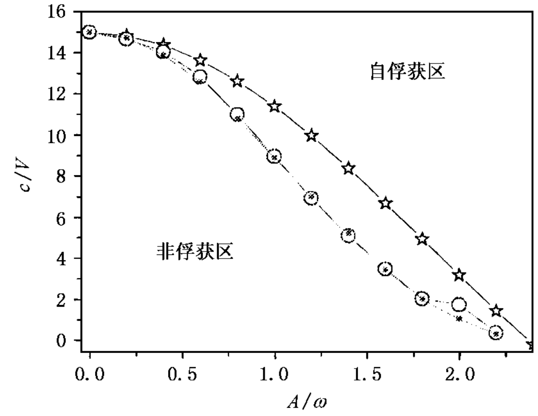

图 5　$v = 1.0$，s 初值为 0.5，θ 初值为 0，不同调制频率 ω 下 c/v 的临界值与 A/ω 的关系(空心圆圈、实心方块分别对应 $\omega = 100$，1000 时 c/v 的临界值与 A/ω 的关系；五角星对应 $15J_0(A/\omega)$)

者符合得越好，见图 4.

这样通过调节 A，ω 可以把发生自俘获时相互作用 c 的临界值调制到很小，使一些在弱相互作用 BEC 体系中不可观察的现象变得明显可测. 如 $\omega=1000$ 时，发生相对相位单调变化的自俘获的 c 的临界值可以从 2 调制到 0.166 甚至更小. 这一结果具有普遍意义. s 初值为 $[-1,1]$ 间任意值，固定 v，发生相对相位单调变化的自俘获的 c 的临界值都可按零阶贝塞尔函数的规律被调制到很小. 如 s 初值为 0.5[19]，θ 初值为 0 时，对 $\omega=100$，1000 改变 $\frac{A}{\omega}$ 值，可以分别把 c 的临界值从 15 调制到 0.586 和 0.524 甚至更小(图 5).

2.2.2. 低频调制($\omega \ll v$)

当周期调制的频率与两势阱中凝聚体的耦合 v 相比非常小时，含时系统(5)可以近似为方程(1)的绝热演化($\dot{\gamma}=A\omega\cos\omega t$). 因此由方程(1)的绝热演化性质可知，对一定大的相互作用强度，如果振幅 A 不超过隧穿窗口，粒子一定自俘获，也就是说调制的最大强度不能超过 $A=(c^{2/3}-v^{2/3})^{3/2}$[12]. 当周期调制场的强度 A 比较大，到一定程度时超过隧穿窗口的大小，粒子就不再能自俘获了，而是发生量子隧穿，即朗道齐纳隧穿，因此在有低频调制场时，粒子自俘获的相互作用强度最小值为 $c=(A^{2/3}+v^{2/3})^{3/2}$.

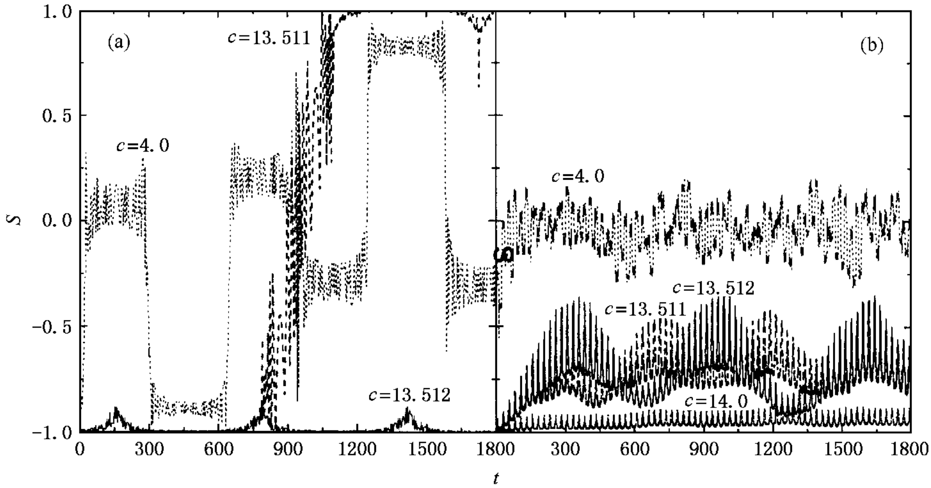

图 6 $v=1.0$，$\omega=0.01$，$A=10$ 时布居数差随时间的演化(点线、划线和实线分别对应 $c=4.0$，13.511，13.512)(a)代表平均场近似结果；(b)代表 $N=50$ 的纯量子系统的结果，其中点划线对应 $c=14.0$，$c=13.511$ 和 $c=13.512$ 这两条线几乎重合在一起

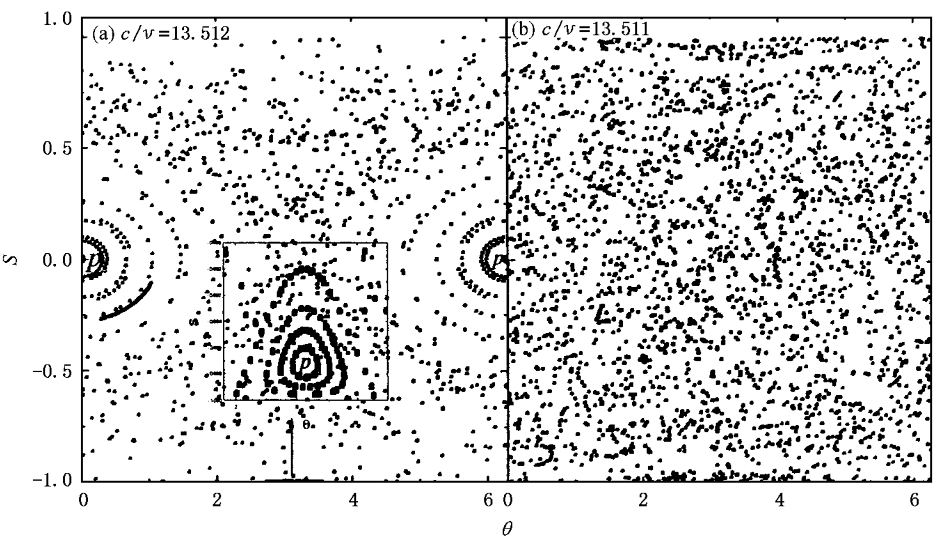

图 7 相平面中系统哈密顿的演化 (a)，(b)分别对应 $c=13.512$，13.511 时布居数差随相对相位的变化

显然周期调制在一定程度上反而破坏了系统的自俘获，使自俘获不容易发生．固定 v 值（$v = 1.0$），据 s 随时间的演化情况，可以找到这个临界的 c 值，如图 6（a），$\omega = 0.01$，$A = 10$ 时，c 不能小于 13.511，否则系统将发生量子隧穿．这在相平面中可以看得很清楚，如图 7，相应于图 6（a）的各参数，当 $c < 13.511$ 时，不动点 p_1，p_2，p_3，p_4 及其周围的轨道已经不存在，相平面中发生了整体混沌；当 $c > 13.511$ 时，不动点 p_1，p_3 附近有封闭轨道，$\langle s\rangle \neq 0$，θ 在平衡点附近振荡，粒子有振荡自俘获发生；不动点 p_2 及其周围的轨道仍然存在，即粒子同时有约瑟夫森振荡发生；其他地方成为混沌区；约瑟夫森区和自俘获区的分界线还比较明显．对不同的调制频率 ω 分别改变 A，就能找到一系列 c 的临界值，画出 c 和 A 的关系图（图 8），发现它们与 $(A^{2/3} + v^{2/3})^{3/2}$ 符合得很好，且频率越低符合越好．

2.2.3. 中频调制（$\omega \approx v$）

不论高频调制还是低频调制都有使粒子自俘获的确定条件，对高频调制这个条件是 $\frac{c}{v} > 2J_0\left(\frac{A}{\omega}\right)$，对低频调制这个条件是 $c > (A^{2/3} + v^{2/3})^{3/2}$．当周期调制的频率不是很高也不是很低时，即 ω 与 v 可比时，情况比较复杂，相平面中的各轨道之间发生共振，粒子时而自俘获时而进入混沌区．如对 $v = 1.0$，$A = 10$，$\omega = 100$ 发生自俘获时 c 的临界值是 1.99（图 4）；$\omega = 0.01$ 时自俘获与量子隧穿临界点上 c 的值是 13.511（图 6，8）．对 $\omega = 2.0$ 时 c 取某些值粒子能自俘获如 5.88，稍大一点就不能自俘获了如 9.2，c 大到一定程度时就永远都能自俘获了如

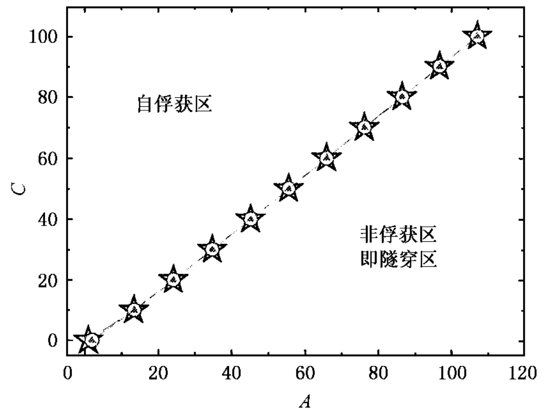

图 8　$v = 1.0$，ω 很小时，c 的临界值与 A 的关系（五角星对应 $c = (A^{2/3} + v^{2/3})^{3/2}$ 空心圆圈和实心三角分别对应 $\omega = 0.05$，0.01 时 c 的临界值与 A 的关系）

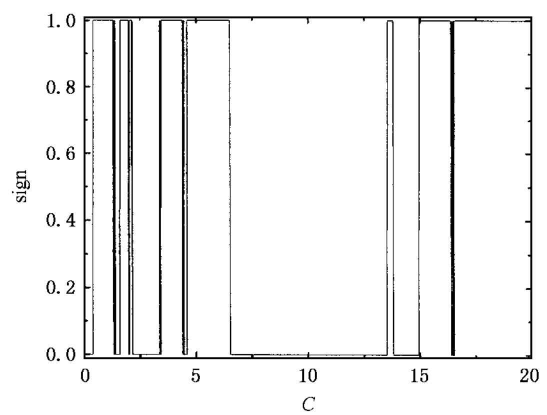

图 9　$v = 1.0$，$\omega = 2.0$，$A = 10$，粒子自俘获时相互作用强度 c 的临界值，sign = 1 表示粒子发生了自俘获，sign = 0 表示没发生自俘获．图线跃变处即粒子自俘获时 c 的临界值

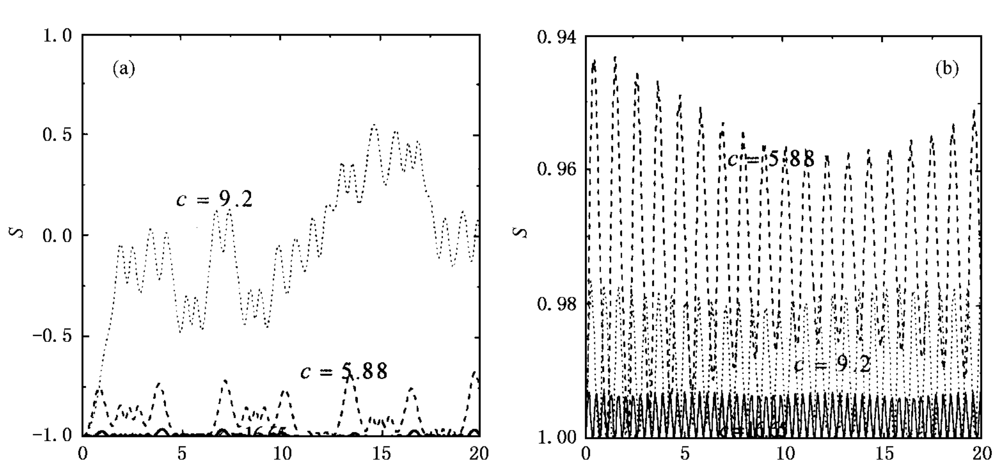

图 10　$v = 1.0$，$\omega = 2.0$，$A = 10$ 时，布居数差随时间的演化（划线、点线、实线分别对应 $c = 5.88$，9.2，16.65）（a）代表平均场近似结果；（b）代表 $N = 50$ 的纯量子系统的结果

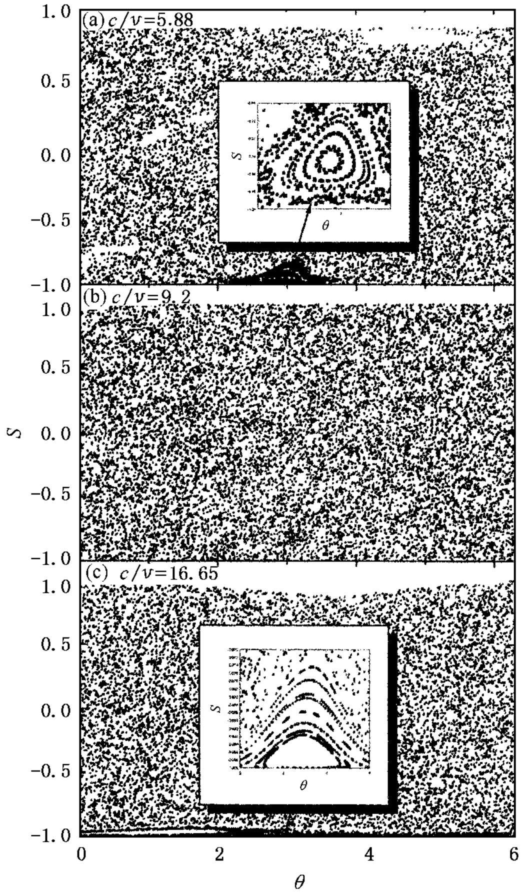

图 11 $v=1.0$，$\omega=2.0$ 时哈密顿在相平面中的演化 (a)，(b)，(c)分别是 $c=5.88$，9.2，16.65 时布居数差随相对相位的变化，小图是大图相应部分的放大

16.65，见图 9．从布居数差随时间的演化情况可以很清楚地看到这种现象．如图 10(a)，$c=5.88$ 时 $\langle s\rangle\neq0$，粒子能自俘获；$c=9.2$ 时 $\langle s\rangle=0$，粒子不能自俘获；$c=16.65$ 时 $\langle s\rangle\neq0$，粒子又能自俘获了．相平面中哈密顿的演化时而有自俘获区(图 11(a)，(c))，时而整体混沌(图 11(b))．因此，对中频调制找不到明确的自俘获条件．

3．量子涨落对自俘获现象的影响

上面讨论的双势阱模型实际由纯量子系统两模型的平均场近似得到．纯量子系统的两模哈密顿为[27,34]

$$H=-\gamma_1(a^\dagger a-b^\dagger b)-c_1(a^\dagger a^\dagger aa+b^\dagger b^\dagger bb)+v_1(a^\dagger b+b^\dagger a), \tag{10}$$

其中 γ，c_1，v_1 分别是量子系统两分量的能量差、粒子间相互作用强度和两分量的耦合系数，$a^\dagger$，$b^\dagger$(a，b)是粒子的产生(湮没)算符．作平均场近似 $a=\sqrt{N_A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_A}$，$b=\sqrt{N_B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_B}$，定义布居数差 $s=\dfrac{N_B-N_A}{N}$，相对相位 $\theta=\theta_B-\theta_A$，其中 N_A，N_B 分别是两模的 A，B 分量上布居的粒子数，总粒子数 $N=N_A+N_B$．由 $\hat{L}=a^\dagger a-b^\dagger b$，$\hat{m}=(a^\dagger b+b^\dagger a)+\mathrm{i}(a^\dagger b-b^\dagger a)$ 满足的海森堡运动方程便可得平均场近似的方程(3)．运算过程中分别用 $\dfrac{\gamma}{N}$，$\dfrac{c}{N^2}$，$\dfrac{v}{N}$，$\dfrac{2t}{N}$ 代替 γ_1，c_1，v_1，t．

从纯量子的角度看，系统总会受量子涨落的影响．粒子数越大量子涨落的影响越小，平均场近似描述越准确，但当实际的实验系统中粒子数不是很大时，量子涨落的影响是不可忽略的．因此，有必要讨论量子涨落对粒子自俘获的影响．我们发现考虑量子涨落后，系统的性质与平均场近似下相似，也能找到自俘获的条件和把相互作用调小的方法．

3.1. 不加周期调制

对纯量子系统，随相互作用强度 c 的增大，粒子也会发生自俘获，但从非俘获到自俘获的变化过程中，c 没有一个明确的临界值，而是一个临界区域，且这个区域恰好在平均场近似下所得临界值的附近．如图 2(b)，对 $N=50$ 的系统取与图 2(a)完全相同的参数，不同的相互作用强度下布居数差随时间的演化情况不同．$c=0.5$ 时，s 随时间有规律地演化，布居数差对时间的平均值为零 $\langle s\rangle=0$，粒子在两个势阱间振荡，没有发生自俘获．$c=1.99$，2.0，2.01 时，s 随时间的演化没有明显的规律，布居数差对时间的平均值朝着不为零的方向变化，粒子开始有自俘获发生，但这三条线几乎重合在一起，看不出从非俘获到自俘获的明显的临界现象，而是在 $c=2.0$ 附近存在一个临界区域，$c=2.0$ 恰好是平均场近似下粒子自俘获的临界值．$c=2.5$ 时，s 随时间的演化重新变得有规律，但 $\langle s\rangle\neq0$，粒子已经自俘获了，且随 c 的增大自俘获现象将越来越明显．

给系统加周期调制 $A_1\sin\omega_1 t$，我们同样研究 c，v，A，ω 间的关系，看平均场近似下系统出现的性质是否从纯量子描述的角度也能观察到．

3.2. 加周期调制

给纯量子系统加上周期调制 $A_1\sin\omega_1 t$ 后哈密顿的矩阵元表示成

$$H_{n,n} = A_1 \sin\omega_1 t(N-2n) - c_1(2n^2 + N^2 - 2Nn - N), \quad (11a)$$

$$H_{n,n-1} = H_{n-1,n} = v_1\sqrt{n(N-n+1)}, \quad (11b)$$

其中 $n = N_A$ 为 A 分量上的粒子数，$c_1 = \frac{c}{N^2}$，$v_1 = \frac{v}{N}$．为方便对比，也分高、低、中频三种情况讨论．

3.2.1. 高频调制

与不加调制时一样，随相互作用强度的增大，粒子从非俘获到自俘获的变化过程中存在一个临界区域，这个区域恰好在平均场近似下粒子自俘获时 c 的临界值附近．如图 3(b)，对 $N = 50$ 的系统取与图 3(a)完全相同的参数，可以看出纯量子系统发生自俘获时 c 的临界区域在 1.53 附近，而 $c = 1.53$ 恰好是该系统在平均场近似下发生自俘获的临界值．

用 ψ_n 表示态函数，做变换 $\psi_n = \psi'_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{A_1}{\omega_1}\cos\omega_1 t(N-2n)}$，同样用(7)式，并取零阶贝塞尔函数近似，哈密顿矩阵元变为

$$H_{n,n} = -c_1(2n^2 + N^2 - 2Nn - N), \quad (12a)$$

$$H_{n,n-1} = H_{n-1,n} = v_1\sqrt{n(N-n+1)}\,J_0\left(\frac{2A_1}{\omega_1}\right). \quad (12b)$$

频率相同时，量子系统所加周期调制的强度 A_1 是平均场近似下系统所加周期调制强度 A 的 $\frac{1}{N}$；所以 $J_0\left(\frac{2A_1}{\omega_1}\right) = J_0\left(\frac{2A}{N\omega}\right)$，即对纯量子系统调节 A，ω 也可把相互作用强度按零阶贝塞尔函数的规律调制到很小．

3.2.2. 低频调制

系统所加周期调制场的频率很低时，考虑量子涨落，我们发现与平均场近似下的现象不同，纯量子系统不会有混沌现象发生．但随 c 的增大，也能找到一个从非俘获到自俘获的临界区域．如图 6(b)，对 $N = 50$ 的系统取与图 6(a)完全相同的参数，这个临界区域在 $c = 13.511$ 附近，这恰好对应平均场近似下粒子自俘获时 c 的临界值．

3.2.3. 中频调制

给系统加上中等频率的周期调制场，在平均场近似下，随着相互作用强度 c 的增加，自俘获与非俘获现象交替出现．与此不同，从纯量子的角度看不会出现这种现象．纯量子系统，随着 c 的增大自俘获会越来越明显．从布居数差随时间的演化情况看，s 的振荡幅度会随 c 的增大不断减小．如图 10(b)，取与图 10(a)完全相同的参数，对 $N = 50$ 的系统，$c = 5.88$ 时，s 在 $[-1, -0.94]$ 间振荡；$c = 9.2$ 时，s 在 $[-1, -0.976]$ 间振荡；$c = 16.65$ 时，s 在 $[-1, -0.993]$ 间振荡．这表明，随 c 的增大，自俘获越来越明显．

以上分析表明，不论从纯量子的角度还是从平均场近似的角度描述，高频周期调制场的影响都有相似之处，改变调制强度和频率，系统的相互作用强度都可以按零阶贝塞尔函数的规律被调小，使凝聚体更接近于理想的弱相互作用系统．所不同的是，从纯量子角度看，粒子发生自俘获时，c 没有一个明确的临界值，而是一个临界区域，且这个区域恰好在平均场近似下粒子自俘获时 c 的临界值附近，对中、低频调制也是如此．此外，对中、低频调制纯量子系统不会有混沌现象发生，中频调制时也不会有非俘获与自俘获交替出现的现象．这些不相符合的现象是量子涨落造成的．因此，在实际的实验中必须考虑量子涨落对系统的影响．

4. 讨　论

我们的讨论对两种不同的现象——相对相位单调变化的自俘获和振荡自俘获做了区分．Michael 等人已经从实验上直接观测到了双势阱中两个弱耦合 BEC 形成的约瑟夫森结之间的隧穿和非线性自俘获现象[19]．他们观测到的，实际上是相对相位单调变化的自俘获．振荡自俘获目前还没有人观测，希望不久就能看到这方面的研究成果．此外，我们发现高频周期调制加强了系统的非线性，通过调节各参数可以把相互作用强度调制到很小，使凝聚体更接近于理想的弱相互作用系统，一些弱相互作用下不易观察的现象如自俘获，就可以明显可测了；但中、低频调制对自俘获有破坏作用．这在现有的实验条件下就能实现，如 Jona-Lasinio 等人的实验中，$\frac{c}{v}$ 的值已经取到了 0.186[40]．这样在相互作用强度很小时，就可以在 Michael 等人的实验中看到自俘获．希望我们的发现对试验有帮助．

我们真诚地感谢吴飙教授、王兵兵教授、付盘铭教授和陈式刚教授的有益讨论．

[1] Franco D *et al* 1999 *Rev*. *Mod*. *Phys*. **71** 463
Anthony L J 2001 *Rev*. *Mod*. *Phys*. **73** 307
[2] Anderson M H *et al* 1995 *Science* **269** 198
Davis K B *et al* 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **75** 3969
Bradley C C *et al* 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **75** 1687
[3] Andrews M R *et al* 1997 *Phys*. *Rev*. A **275** 637
Hall D S *et al* 1998 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **81** 1543
Stamper-Kurn D M *et al* 1998 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **80** 2027
[4] Anderson B P and Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686
[5] Raghavan S，Smerzi A，Fantoni S and Shenoy S R 1999 *Phys*. *Rev*. A **59** 620
[6] Giovanazz S，Smerzi A and Fantoni S 2000 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **84** 4521
[7] Smerzi A，Fantoni S，Giovanazzi S and Shenoy S R 1997 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **79** 4950
[8] Raghavan S，Smerzi A and Kenkre V M 1999 *Phys*. *Rev*. A **60** R1787
[9] Wu B and Niu Q 2000 *Phys*. *Rev*. A **61** 023402
[10] Liu J，Wu B and Niu Q 2003 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **90** 170404
Wu B，Liu J and Niu Q 2005 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **94** 140402
[11] Fu L B，Liu J and Chen S G 2002 *Phys*. *Lett*. A **298** 388
[12] Liu J *et al* 2002 *Phys*. *Rev*. A **66** 023404
[13] Liu W M *et al* 2002 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **88** 170408
[14] Williams J E and Holland M J 1999 *Nature* **401** 568
[15] Zhang C，Liu J，Raizen M and Niu Q 2004 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **92** 054101
[16] Zhang C，Liu J，Raizen M and Niu Q 2004 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **93** 074101
[17] Dalfovo F and Stringari S 1996 *Phys*. *Rev*. A **53** 2477
[18] Markus G，Cindy R A and Deborah J S 2003 *Nature* **426** 537
[19] Michael A *et al* 2004 arXiv：cond-mat/0411757 v3
[20] Zhang L and Ge M L 2000 *Fashionable Problem in Quantum Mechanic Tsinghua*（Beijing：Tsinghua University Press）（in Chinese）［张 礼、葛墨林 2000 量子力学的前沿问题（北京：清华大学出版社）］
[21] Edwards M *et al* 1996 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **77** 1671
Stringari S 1996 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **77** 2360
[22] Smerzi A and Fantoni S 1997 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **78** 3589
[23] Kagan Y，Surkov E L and Shlyapnikov G V 1997 *Phys*. *Rev*. A **55** R18
[24] Dodd R J *et al* 1997 *Phys*. *Rev*. A **56** 587
Rokhsar D S 1997 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **79** 2164
[25] Martin H 2001 *Phys*. *Rev*. A **64** 011601（R）
[26] Zobay O and Garraway B M 2000 *Phys*. *Rev*. A **61** 033603
[27] Sigmund K and Sols F 2002 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **89** 060403
[28] Yan K Z and Tan W H 1999 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **48** 1185（in Chinese）［闫珂柱、谭维翰 1999 物理学报 **48** 1185］
[29] Tan W H and Yan K Z 1999 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **48** 1983（in Chinese）［谭维翰、闫珂柱 1999 物理学报 **48** 1983］
[30] Tan W H and Yan K Z 2000 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **49** 1909（in Chinese）［闫珂柱、谭维翰 2000 物理学报 **49** 1909］
[31] Wang C and Yan K Z 2004 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **53** 1284（in Chinese）［王 、闫珂柱 2004 物理学报 **53** 1284］
[32] Lu J 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 811
[33] Zhang G F，Yin W，Liang J Q and Yan Q W 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 988
[34] Milburn G J *et al* 1997 *Phys*. *Rev*. A **55** 4318
[35] Gomez Llorente J M and Plata J 1992 *Phys*. *Rev*. A **45** R6954
[36] Grossman F and Hänggi P 1992 *Europhys*. *Lett*. **18** 571
[37] Gomez Llorente J M and Plata J 1992 *Phys*. *Rev*. A **45** R6954
[38] Yosuke K and Yoshihiko M 2000 *Phys*. *Rev*. A **62** 061401（R）
[39] Yosuke K 1994 *Phys*. *Rev*. A **50** 843
[40] Jona-Lasinio M *et al* 2003 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **91** 230406

Self-trapping and its periodic modulation of Bose-Einstein condensates in double-well trap*

Wang Guan-Fang[1)2)] Fu Li-Bin[3)†] Zhao Hong[1)] Liu Jie[3)]

[1)] (*Institute of Physical Science and Technology*, *Lanzhou University*, *Lanzhou* 730000, *China*)

[2)] (*Beijing Graduate School*, *China Academe of Engineering Physics*, *Beijing* 100088, *China*)

[3)] (*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics*, *Beijing* 100088, *China*)

(Received 30 March 2005; revised manuscript received 29 April 2005)

Abstract

Self-trapping of Bose-Einstein condensates (BEC) in double-well trap is investigated. Two kinds of self-trapping are discussed through phase space analysis in the mean-field approximation: 1) The number of atoms oscillates near an equilibrium point in the phase space, while relative phase increases monotonously with time (running-phase); 2) Both the number of particles and the relative phase oscillate near an equilibrium point in the phase space. In particular, we investigate how an external periodic filed influence the self-trapping. It is found that the external periodic field may dramatically modulate the critical points at which the transition to self-trapping occurs. With this, we can observe self-trapping phenomenon in a dilute Bose-Einstein condensate with a very weak interaction as well. Finally, the effect of many-body quantum fluctuation on self-trapping is also studied. We also discuss how to observe the self-trapping phenomenon with present experimental techniques.

Keywords: Bose-Einstein condensate (BEC), self-trapping, double-well, periodic modulation

PACC: 0365, 0155, 7335

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10474008, 10445005) and Science and Technology Fund of CAEP.

† E-mail: lbfu@iapcm.ac.cn